

# REALIZÁCIA ZÁVÄZNÝCH TRANSFORMÁCIÍ NÁRODNÝCH REFERENČNÝCH SÚRADNICOVÝCH A VÝŠKOVÉHO SYSTÉMU DO EURÓPSKEHO TERESTRICKÉHO REFERENČNÉHO SYSTÉMU 1989

Matej Klobušiak, Katarína Leitmannová, Dušan Ferianc<sup>1</sup>

## *Realization of obligatory transformation between national coordinates and height reference system into ETRS89*

**Abstract:** For the geodetic control manager was the sophisticated tool for precise transformations between national coordinates reference systems (S-JTSK, S-42, S-42/83, height reference system (Bpv) and ETRS89 worked out. Transformation methods use transformation model on the GRS80 ellipsoid surface and models of the residual component from which is the particular systematic component of the local and global scale deformation interpolated by means of the bicubic spline method. By adding the residual height component model to the digital quasigeoid model was the Digital Height Reference Model defined. It is used for the direct conversion of the geodetic heights determined by GPS in ETRS89 system into Bpv. We introduce the analysis of the independent testing of the transformation formulas JTSK-ETRS89, S-42-ETRS89, S-42/83-ETRS89. Application of the new coordinates realisation JTSK/03 and S-42/83/03 eliminates the long-term discrepancy in the network homogeneity.

## 1 Úvod

Rezolúcia No. 3 schválená plénom sympózia EUREF (Subkomisia pre Európu komisie X – Globálne a regionálne siete, sekcie I – Určovanie polohy asociácie IAG medzinárodnej únie geodetov a geofyzikov IUGG) v Dubrovniku v júni 2001 položila národným autoritám pre geodéziu, kartografiu a kataster priamo otázku : „či máme vytvorený relevantný vzťah realizácií národných súradnicových a výškových systémov na realizáciu Európskeho terestrického referenčného systému ETRS89, či dokážeme kvalifikovane previesť realizácie našich referenčných súradnicových systémov a výškové referenčné systémy na európske a svetové“. Ďalej v tomto príspevku jeho autori predkladajú v kontexte týchto otázok niektoré riešenia a ich výsledky.

Vzhľadom na komplexnosť problematiky prechodu geodetických prác na využívanie nových technológií určovania priestorovej polohy v reálnom alebo blízkom reálnom čase v novom európskom terestrickom referenčnom systéme uvádzame len schémy postupov transformácie súradníc medzi národnými súradnicovými systémami, výškovým systémom normálnych

---

<sup>1</sup> Ing. Matej Klobušiak, PhD., e-mail: [Klobusiak@gku.sk](mailto:Klobusiak@gku.sk), Ing. Katarína Leitmannová, e-mail: [Leitmannova@gku.sk](mailto:Leitmannova@gku.sk), Ing. Dušan Ferianc, e-mail: [ferianc@gku.sk](mailto:ferianc@gku.sk), Geodetický a kartografický ústav Bratislava, Chlumeckého 4, 827 45 Bratislava, tel.: ++421-2-43334822,

výšok a Európskym terestrickým referenčným súradnicovým systémom 1989 (ETRS89). Schémy sú všeobecné a platia tak pre Jednotnú trigonometrickú sieť katastrálnu (S-JTSK), ako aj pre polohový súradnicový systém S-42, jeho neskoršiu realizáciu S-42/83 a Baltský výškový systémom po vyrovnaní (Bpv).

Zavádzame novú realizáciu súradníc s označením JTSK/03, S42/03 a S42/83/03. Nové realizácie xxxx/03 vznikli využitím novej informácie o priestorových vzťahoch medzi bodmi Štátnej priestorovej siete (ŠPS), ktoré vznikli prebratím aj vybratých bodov Štátnej trigonometrickej siete (ŠTS) a na ktorých sa uskutočnilo meranie technológiou GPS. Modelovaním rozdielov súradníc určených v systémoch ETRS89 a pôvodných S-JTSK, resp. S-42, S-42/83 po ich pretransformovaní na referenčný elipsoid GRS80 sme určili korekcie pôvodných realizácií súradníc. Analogický postup sme urobili aj pre modelovanie rozdielu výšok. Detaily budú uvedené v kapitolách 6 a 7 tohto dokumentu.

Pre systém nadmorských výšok Bpv sme prijali pravidlo nemennosti mierky normálnych výšok. Rozmer nebude ovplyvňovaný mierkou platnou pre polohu v systéme JTSK, resp. S-42, S-42/83. Transformáciou medzi národným a európskym výškovým referenčným systémom nedochádza k jej zmene. Systém normálnych výšok Bpv je definovaný nad vzťažnou kvázipotenciálnou plochou reprezentovanou digitálnym modelom kvázigeoidu (DMQ), ktorý je pre Slovensko jednoznačne vzťahnutý k systému ETRS89 s referenčným elipsoidom GRS80. Preto, ak je potrebné určiť výšku kvázigeoidu  $n$  v bode definovanom rovinnými súradnicami  $xy$ (JTSK(Bessel)), resp.  $xy$ (S-42(Krasovský)),  $xy$ (S-42/83(Krasovský)), tieto je potrebné najprv transformovať na geodetické zemepisné súradnice  $BL$ (ETRS89(GRS80)) a až v tomto bode interpolovať výšku kvázigeoidu  $n = DMQ(B,L)$ . Bližšie pozri časť 5.1.5.

Doteraz každá realizácia gravimetrického kvázigeoidu pre Slovensko vykazuje systematické odchýlky od hodnôt v bodoch, v ktorých poznáme presnú elipsoidickú výšku  $H_{GPS}$ , určenú nezávislou technológiou GPS a normálnu výšku  $h_{niv}$ , určenú technológiou nivelačného merania v systéme Bpv. Preto predmetné modely kvázigeoidov nahradíme **Digitálnym výškovým referenčným modelom Baltským po vyrovnaní** (ďalej **DVRM-Bpv**). Pre tento výškový referenčný model platí zásada, že referenčná výška  $n_{DVRM-Bpv}$  v ľubovoľnom bode jeho definičného oboru je zložená z pôvodnej výšky kvázigeoidu  $n'_{DMQ}$  a korekcie  $k_{DMRZ-DMQ}$  spĺňajúcej podmienku  $h_{niv} = H_{GPS} - n_{DVRM-Bpv}$ , kde  $n_{DVRM-Bpv} = n'_{DMQ} - k_{DMRZ-DMQ}$ .

## 2 Vysvetlenie niektorých motivácií a základných pojmov a symbolov

V tomto dokumente sú zavedené nové pojmy, ktoré sa v geodetickej praxi na Slovensku, ale rovnako ani v legislatíve (zákonoch, vyhláškach, smerniciach, inštrukciách) a metodických postupoch, technologických postupoch a normách, spadajúcich do pôsobnosti Úradu geodézie, kartografie a katastra Slovenskej republiky (ÚGKK SR) doteraz nevyskytujú.

Nová technológia určovania priestorovej polohy, založená na využívaní signálov globálnych navigačných satelitných systémov (GNSS), umožňuje rôznymi metódami určiť relatívne rýchlo a „ľahko“ presnú polohu geodetického bodu s vysokou, alebo voliteľnou polohovou a výškovou presnosťou. Mierková stabilita a hlavne jej presnosť dosiahnutá statickými

epochovými meraniami na bodoch Slovenskej geodynamickéj referenčnej siete (SGRN), v porovnaní s realizáciou medzinárodného terestrického referenčného systému ITRS, sa pohybuje v rozmedzí  $2 \times 10^{-3}$  až  $13 \times 10^{-3}$  mm/km. To znamená, že vplyvom mierky sa dĺžka 1000 km zmení o 2 až 13 milimetrov. Z hľadiska stability etalónu môžeme hovoriť, v špecifických prípadoch permanentnej observácie, až o relatívnej presnosti  $10^{-9}$  ppm [ 3 ]. V celom príspevku postupne znamená :

$x, y$	karteziánske (pravouhlé) rovinné súradnice kartografickej projekčnej sústavy,
$h$	normálna výška vztiahnutá k hladine kvázigeoidu, resp. výškovej referenčnej ploche,
$B, L, H$	geodetické zemepisné súradnice, kde $H$ je elipsoidická (geodetická) výška,
$X, Y, Z$	3D karteziánske (pravouhlé) priestorové súradnice,
$n', n$	výška kvázigeoidu, resp. výškového referenčného modelu,
DMQ	digitálny model kvázigeoidu,
DMRZ	digitálny model reziduálnej zložky [ 2 ],
DMRZ-JTSK	digitálny model reziduálnej zložky realizácie systému JTSK,
DMRZ-JTSK/03	digitálny model reziduálnej zložky realizácie systému JTSK/03,
DMRZ-S42	digitálny model reziduálnej zložky realizácie systému S-42,
DMRZ-S42/83	digitálny model reziduálnej zložky realizácie systému S-42/83,
DMRZ-S42/83/03	digitálny model reziduálnej zložky realizácie systému S-42/83/03,
DVRM	digitálny výškový referenčný model,
DVRM-Bpv	digitálny výškový referenčný model systému Balt po vyrovnaní,
SRS	súradnicový referenčný systém

### 3 Prehľad geodetických referenčných systémov a ich realizácií

Záväzné geodetické referenčné systémy môžeme rešpektovaním ISO normy 19111 a základného členenia uvedeného v [ 4 ] rozdeliť nasledujúco :

- podľa **pôsobnosti** na :
  - *globálne, regionálne* – celosvetové, celoeurópske,
  - *lokálne* – národné,
- podľa **fenoménu** na :
  - *geometrické*, majúce vzťah iba na geometrický aspekt priestoru,
    - *karteziánske- pravouhlé*
      - v Euklidovskom priestore, 3D,
      - v kartografickom projekčnom dvojrozmernom priestorovom zobrazení, 2D,
    - *geodetické*, definované na referenčnom elipsoide, 2D, resp. 3D,
    - *polárne*, 2D,
  - *fyzikálne*, majúce vzťah na tiažové pole Zeme, 1D,
  - *geometricko-fyzikálne*, vytvárajúce kombináciu geometrie rešpektujúcej fyzikálne vlastnosti Zeme, 3D + 1D.

Ďalej budeme dôsledne rozlišovať medzi definíciou systému a jeho realizáciou [ 4 ].

**Medzi globálne geodetické referenčné systémy zarad'ujeme**

- a) Medzinárodný terestrický referenčný systém (záväzná skratka „**ITRS**“ – **I**nternational **T**errestrial **R**eference **S**ystem ), [Globálny {geometrický {3D}}],
- b) Medzinárodný výškový systém (záväzná skratka „**WHS**“ – **W**orld **H**eight **S**ystem), [Globálny {fyzikálno-geometrický {1D}}],

*Medzi regionálne geodetické referenčné systémy zaradujeme*

- c) Európsky terestrický referenčný systém 89 (záväzná skratka **ETRS 89** - **E**uropean **T**errestrial **R**eference **S**ystem **1989**) [ *I* ], [Globálny {geometrický {3D}}],
- d) Európsky vertikálny referenčný systém (záväzná skratka „**EVRS**“ – **E**uropean **V**ertical **R**eference **S**ystem) je „gravity-related“ výškový referenčný systém [ *I* ], [Lokálny {geometricko-fyzikálny {3D + 1D}}]
- e) Európsky priestorový referenčný systém (záväzná skratka „**ESRS**“ – **E**uropean **S**patial **R**eference **S**ystem ). Vzniká spojením ETRS89 a EVRS, [Globálny {geometrický {3D+1D}}].

*Medzi lokálne – národné geodetické referenčné systémy zaradujeme doteraz platné*

- f) Súradnicový systém Jednotnej trigonometrickej siete katastrálnej (záväzná skratka „**S-JTSK**“), [Lokálny {geometrický {karteziánsky 2D}}],
- g) Súradnicový systém 1942 (záväzná skratka „**S-42**“), [Lokálny {geometrický {karteziánsky 2D}}],
- h) **B**altský výškový systém **p**o vyrovnaní (záväzná skratka „**Bpv**“), [Lokálny {geometricko-fyzikálny {1D}}],
- i) **G**ravimetrický systém (záväzná skratka „**S-Gr**“), [Globálny, resp. lokálny {fyzikálny {1D}}],

### 3.1 Definície záväzných geodetických systémov

- a) **ITRS** (**I**nternational **T**errestrial **R**eference **S**ystem) je systém, ktorého počiatok leží v ťažisku hmôt Zeme, vrátane hmôt oceánov a atmosféry. Systém je definovaný ako geocentrický, ekvatoriálny, terestrický s konvenčnou orientáciou v greenwichskom poludníku. Jednotky dĺžky, hmotnosti a času sú vedené v SI (Le Systém International d'Unités, 1991), tj. v metroch, kilogramoch a sekundách. Astronomická jednotka času je udávaná v dňoch. Deň obsahuje 86400 SI sekúnd. Orientácia osí je totožná s BIH systémom 1984.0 (Bureau International de l'Heure) s presnosťou  $\pm 5$  mas . ITRS patrí do skupiny Konvenčných terestrických referenčných systémov (CTRS-Convnetional Terrestrial Reference System) monitorovaných Medzinárodnou službou rotácie Zeme (IERS-International Earth Rotation Service), podľa IUGG rezolúcie č. 2 prijatej na 20. valnom zhromaždení IUGG vo Viedni v roku 1991,
- b) **ETRS 89** (**E**uropean (alebo **EUREF**) **T**errestrial **R**eference **S**ystem **1989** ) je systém s rovnakou definíciou ako ITRS, pre ktorý platí totožnosť realizácií ich referenčných rámcov **ETRF 89 epocha 1989.0** a **ITRF 89 epocha 1989.0**. (Poznámka: referenčný systém ETRS 89 sa pohybuje spolu so stabilnou časťou Eurázijskej tektonickej litosférickej platne, ktorej modelová rýchlosť je od roku 1994 definovaná modelom NNR-NUVEL1A a od roky 2000 modelom ITRF2000),
- c) **EVRS** (**E**uropean **V**ertical **R**eference **S**ystem ) je „gravity-related“ výškový statický referenčný systém definovaný konvenciami pre „vertical datum“, výškové zložky ako

rozdiely potenciálov zemského gravitačného poľa  $W_P$  a potenciálom  $W_0$  systému EVRS označované aj ako geopotenciálové kóty  $c_P$  a nakoniec EVRS je „zero tidal system“ zhodný podľa IAG Rezolúcie.

- d) **ESRS (European Spatial Reference System)** je európsky priestorový referenčný systém, ktorý vzniká integráciou dvoch systémov ETRS89 a EVRS. Je to systém, ktorý má geometricko-fyzikálne vlastnosti,
- e) **S-JTSK** je definovaný Besselovým elipsoidom, Křovákovým konformným kuželovým zobrazením vo všeobecnej polohe,
- f) **Bpv** – Baltský výškový systém po vyrovnaní je definovaný systémom normálnych Molodenského výšok
- g) **S-Gr** Potsdamský gravimetrický systém založený na absolútnom meraní tiažového zrýchlenia na bode Potsdam,
- h) **S-Gr 71** je referenčný gravimetrický systém, v ktorom tiažové zrýchlenie je vyjadrené v Potsdamskom gravimetrickom systéme opravenom o konštantnú hodnotu  $-13.8 \times 10^{-5}$  [m/s<sup>2</sup>],
- i) **IGSN 71** (International Gravimetric Standardization Net 1971) je referenčný gravimetrický systém, v ktorom tiažové zrýchlenie je vyjadrené v Potsdamskom gravimetrickom systéme opravenom o konštantnú hodnotu  $-13.8 \times 10^{-5}$  [m/s<sup>2</sup>].

### 3.2 Realizácie záväzných geodetických systémov

- a) realizácia ITRS je **Medzinárodný terestrický referenčný rámec** (záväzná skratka „**ITRFyy epoch  $t_i$** “ - International Terrestrial Reference Frame yy epocha  $t_i$ ). Definovaný je množinou staníc rozmiestnených po celej Zemi, na ktorých sa vykonávajú nepretržité observácie technológiami založenými na princípoch VLBI, LLR, GPS, SLR a DORIS. Pre tieto stanice sa odhadujú 3D karteziánske súradnice a ročné rýchlosti ich zmien, charakterizované globálnou kovariančnou maticou,
- b) realizácia ETRS 89 sa volá **Európsky terestrický referenčný rámec** (záväzná skratka „**ETRFyy epoch  $t_j$** “ - European Terrestrial Reference Frame yy epocha  $t_j$ ). Definovaný je vybranou množinou permanentných staníc GNSS rozmiestnených po Eurázijskej tektonickej litosférickej platni s odhadom 3D karteziánskych súradníc a ročných diferenciálnych rýchlostí ich zmien (vzhľadom k modelovým rýchlostiam modelu NNR-NUVEL1A), charakterizovaných globálnou kovariančnou maticou,
- c) realizácia ETRS 89 na území Slovenska je reprezentovaná prostredníctvom aktívnych a pasívnych bodov Slovenskej geodynamickéj referenčnej siete (SGRN). Nazývame ju **Slovenský kinematický terestrický referenčný rámec** (záväzná skratka „**SKTRFyy epocha  $t_j$** “ [ 8 ]. Definovaný je vybranou množinou bodov SGRN, ktoré delíme na SGRN body permanentnej observácie GNSS (SPOS) a body SGRN epochovej observácie GNSS (SEOS). Niektoré body SPOS sú začlenené do celoeurópskeho systému EPN (EUREF Permanent Network). Body SKTRFyy sú definované odhadom 3D súradníc, ich ročnou diferenciálnou rýchlosťou zmeny a charakteristikami presnosti,
- d) realizácia EVRS je označovaná ako **Európsky vertikálny referenčný rámec EVRF 2000** (European Vertical Reference Frame 2000), ktorý je definovaný pomocou geopotenciálnych kót a normálnych výšok uzlových bodov Jednotnej európskej nivelačnej siete UELN 95/98 vzťahnutej k NAP (Normaal Amsterdams Peils), kde  $c_{NAP}=0$ ,  $W_{NAP}=U_0$

GRS80

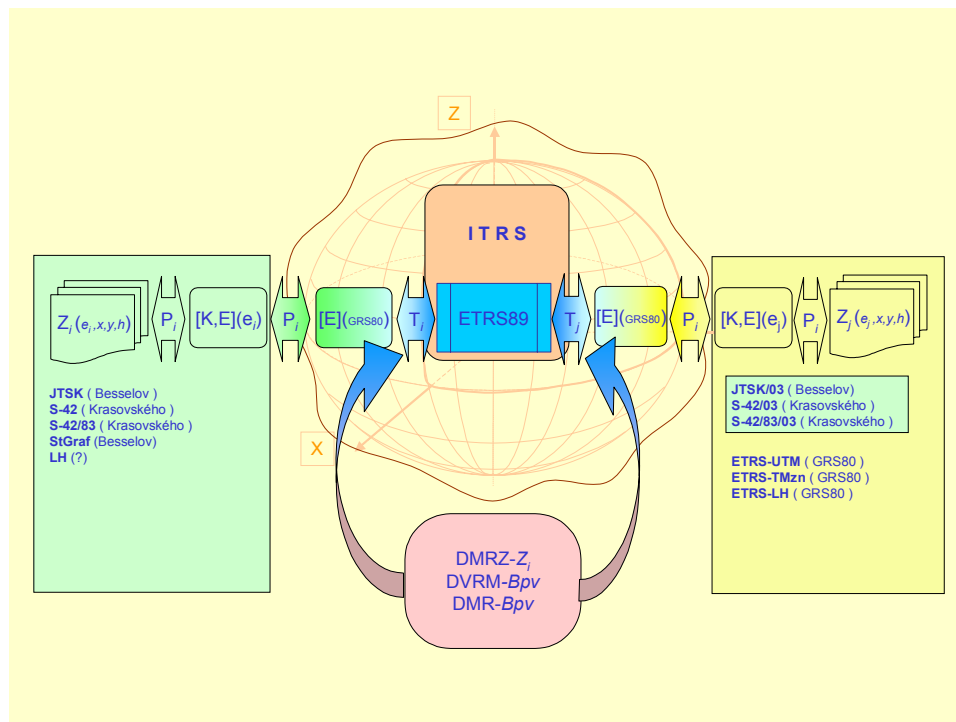
- e) realizácia S-JTSK je definovaná súborom súradníc bodov Jednotnej trigonometrickej siete katastrálnej (JTSK),
- f) spresnená realizácia S-JTSK prostredníctvom GPS meraní je definovaná súborom súradníc bodov Jednotnej trigonometrickej siete katastrálnej (**JTSK/03**),
- g) realizácia systému **S-Gr** je zabezpečená prostredníctvom rámcov S-Gr 64, S-Gr 71, IGSN 71, UEGN 1994 (Unified European Gravimetric Network epocha 1994) a UEGN 2002, kde postupne znamená:
  - i. **S-Gr 64** je realizácia gravimetrického systému platného pre bývalé Československo. Referenčný bod bol medzinárodnej siete Praha - Ruzyně. Rozmer siete bol odvodený z gravimetrickej základne Hřensko – Dolní Dvořište, ktorej určujúci rozmer bol určený z meraní v medzinárodnej sieti.
  - ii. **S-Gr 71** je realizácia gravimetrického systému, ktorá vznikla zo systému S-Gr 64 odstránením nasledujúcich chýb: a) na referenčnom bode Potsdam potsdamského tiažového systému bola zistená chyba  $+13.8 \times 10^{-5}$  [m/s<sup>2</sup>], b) na referenčnom bode Praha-Ruzyně bola odstránená chyba  $-0.19 \times 10^{-5}$  [m/s<sup>2</sup>], ktorá ovplyvnila hladinu tiažového systému S-Gr 64, c) odstránením chybných mierok tiažového systému S-Gr 64 na úrovni  $1 \times 10^{-4}$  a d) lokálnych deformácií v rozsahu až  $\pm 6 \times 10^{-7}$  [m/s<sup>2</sup>]. Realizácia systému S-Gr 1971 je definovaná hodnotami tiažového zrýchlenia bodov Medzinárodného etalónového gravimetrického polygónu (Krakov-Budapešť, časť Javorina-Slovenské Ďarmoty).
  - iii. **S-Gr 98** je realizácia gravimetrického systému založeného na množine absolútnych gravimetrických bodov rozmiestnených na území Slovenska, Maďarska, Česka a množine relatívnych meraní v období rokov 1971 – 1998.
  - iv. **IGSN 71** je realizácia svetového gravimetrického systému definovaného hodnotami tiažového zrýchlenia na množine absolútnych gravimetrických bodov rozmiestnených po celej Zemi (mimo územia bývalých socialistických krajín) vzájomne prepojených relatívnym tiažovým meraním a vyrovnaných v jednom bloku.
- h) **UEGN 2002** (United European Gravimetric Network) je realizácia zjednoteného európskeho gravimetrického systému definovaného množinou hodnôt absolútneho tiažového zrýchlenia na absolútnych gravimetrických bodoch európskych krajín, ktorý vznikol vyrovnaním množiny absolútnych gravimetrických bodov, prepojených relatívnymi gravimetrami, rozmiestnených na území celej Európy.

#### **4 Aplikačná schéma transformácie súradníc a výšok do ETRS89**

ISO/TC 211 Geographic Information začala už v 1994 (na 1. plenárnom zasadnutí v novembri 1994, Oslo) definovať ciele na založenie štruktúrovanej množiny štandardov pre lokalizáciu informácie o objektoch a ich atribútoch relatívne k Zemi. Tieto štandardy špecifikujú pre geografické informácie, metódy, nástroje, služby pre správu dát (vrátane ich definície a popisu), ich získavanie, spracovanie, analýzu, sprístupňovanie, prezeranie, šírenie v podobe digitálno-elektronickej formy medzi rozličnými používateľmi, systémami a umiestneniami. Štandard ISO/TC 211, WI 11 – „Spatial referencing by coordinates“ : ISO 19111 popisuje konceptuálnu schému a definuje popis minimálne dvoch typov dát, pre ktoré musia byť dané

základné informácie 1-, 2- a 3-rozmerných referenčných súradnicových systémov. V nasledujúcom obrázku (obr. 1) je načrtnutý účinok aplikačnej schémy pre zmenu súradníc zo zdrojového súradnicového referenčného systému reprezentovaného zdrojovým kartografickým zobrazením  $Z_i$  do cieľového súradnicového referenčného systému reprezentovaného cieľovým kartografickým zobrazením  $Z_j$ . Zmena súradníc z jedného súradnicového referenčného systému do druhého súradnicového referenčného systému sa vykonáva postupnosťou niekoľkých prevodov súradníc  $P_i$ ,  $i=1,2,3$ , a niekoľkých (obvykle dvoch) transformácií  $T_j$ , kde  $j=1,2$ .

V schéme postupne znamená :  $Z_i$  zobrazenie – kartografická projekcia súradnicového referenčného systému ( SRS  $i$  ), ku ktorému sú súradnice vzťahnuté,  $e_i$  referenčný elipsoid  $i$ -teho SRS,  $x,y$  2D karteziánske súradnice zobrazenia  $Z_i$ ,  $h$  normálna výška 1D výškového referenčného systému (VRS),  $P_i$  prevod súradníc z jedného typu súradníc (geodetické, karteziánske 2D, 3D) na druhý pri zachovaní  $i$ -teho SRS,  $[E, K](e_i)$  E-elipsoidické (geodetické) a K-karteziánske súradnice definované s geocentrickým referenčným elipsoidom  $e_i$ ,  $[E](GRS80)$  elipsoidické súradnice na referenčnom elipsoide,  $T_i$ ,  $T_j$  transformácia elipsoidických súradníc do/zo systému ETRS89 na povrchu referenčného elipsoidu GRS80.



obr. 1 Aplikačná schéma prevodov a transformácie zobrazenia súradnicového referenčného systému do ETRS89 a späť.

Ďalej v obrázku znamená : ITRS medzinárodný terestrický referenčný systém, ETRS-UTM je zobrazenie „Universal Transverse Mercator“ SRS ETRS89, čo je konformné zobrazenie pre mierky väčšie ako 1:500 000, ETRS-TMzn je „Transverse Mercator zobrazenie zóny „zn“ ako v predchádzajúcom príklade, len je definované iba pre pan-Európsku oblasť, ETRS-LH je lokálne horizontálne topocentrické zobrazenie s voľbou výšky lokálneho horizontu tak, aby bola minimalizovaná potreba matematickej redukcie meranej dĺžky do kartografickej projekčnej roviny s referenčným elipsoidom GRS80, DMRZ- $Z_i$  digitálny model reziduálnej zložky transformácie zobrazenia  $Z_i$  do ETRS89, DVRM- $Bpv$  je digitálny výškový referenčný

model systému Balt po vyrovnaní a slúži na priamy prepočet elipsoidickej výšky systému ETRS89 do systému normálnych výšok Bpv, DMR-Bpv je digitálny model reliéfu terénu vyjadrený v systéme normálnych výšok Bpv.

## 5 Metóda transformácie národných referenčných systémov do ETRS89

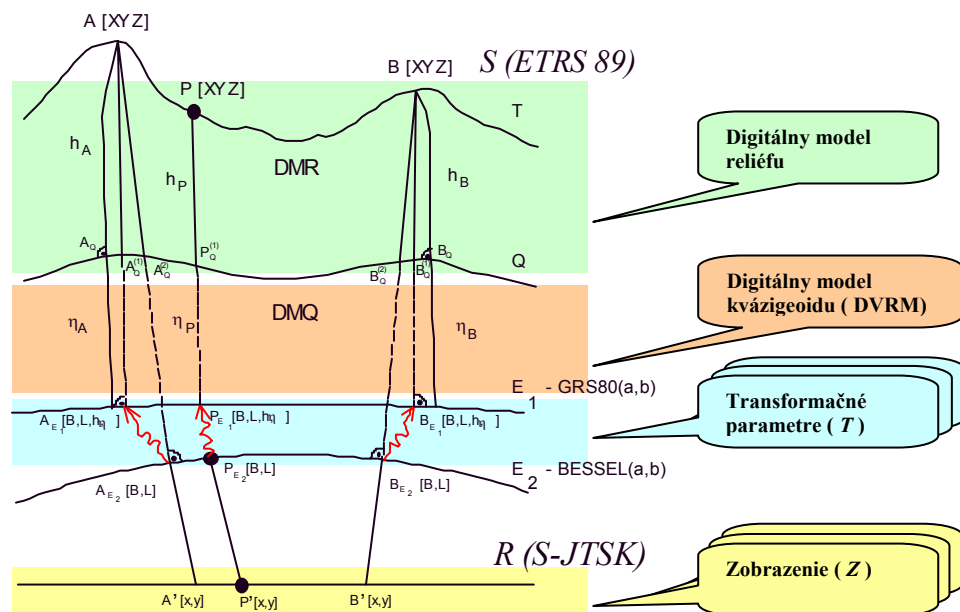
V tejto časti pôjde o transformáciu 2D karteziánskych rovinných súradníc  $(x,y)$  a 1D normálnych výšok  $(h)$  do 3D karteziánskych  $(X,Y,Z)$ , resp. geodetických súradníc  $(B,L,H)$ , pričom musí platiť základná podmienka  $H=h+n$ . Geodetická výška vzniká súčtom normálnej výšky a výšky základnej „hladinovej“ plochy reprezentovanej buď modelom kvázigeoidu, alebo výškovým referenčným modelom.

Je možné uvažovať dva základne princípy transformácie medzi súradnicovými systémami. Prvý, ktorý vytvára vzťah medzi 3D karteziánskymi súradnicami  $(X,Y,Z)$  zdrojovej a cieľovej sústavy, resp. medzi 3D elipsoidickými súradnicami  $(B,L,H)$ , bližšie pozri [ 2 ] a druhý, vytvárajúci vzťah medzi 2D elipsoidickými súradnicami  $(B,L)$ . Tento uskutočňuje transformáciu súradníc na povrchu referenčného elipsoidu.

Zatiaľ čo **prvý transformačný vzťah** predpokladá, že karteziánske súradnice  $(X,Y,Z)$ , odpovedajúce národným systémom, boli vypočítané z rovinných súradníc  $xy(Z(e_i))$ , normálnej výšky  $h(Bpv)$  a výšky kvázigeoidu  $n'(DMQ, \text{ resp. } DVRM)$  známymi prevodmi matematickej kartografie podľa schémy  $xyh+n'(Z(e_i, DMQ)) \rightarrow (X,Y,Z)$ , kde  $n'$  reprezentuje výšku kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom  $e_i$ , **druhý transformačný vzťah** predpokladá, že geodetické súradnice sa získajú podľa schémy oddeľujúcej polohovú zložku od výškovej (pri transformácii na povrchu elipsoidu výšková zložka je zanedbaná), a preto predmetom transformácie je iba horizontálna poloha. Prevod 2D  $xy$  súradníc na elipsoidické sa uskutočňuje podľa známej schémy  $xy(Z(e_i)) \rightarrow BL(e_i)$ .

Prvá transformácia využíva vlastnosti sedem parametrickej podobnostnej transformácie prostredníctvom Molodenského-Badegasovho modelu. Výsledkom je odhad obvykle siedmich transformačných parametrov a vektor reziduí. Vzhľadom na nekonzistentnosť polohového a výškového systému sme tento postup ďalej neuplatnili. Existujú tri základné nevýhody : a) spomenutá nekonzistentnosť polohového a výškového metrického etalónu, b) normálna výška v platnom referenčnom systéme získaná transformáciou 3D priestorovej polohy bodu je ovplyvnená tak transformačnými parametrami, ako aj modelom kvázigeoidu, resp. referenčným výškovým modelom, c) pre každý referenčný elipsoid treba poznať individualizovaný model kvázigeoidu, napriek tomu, že existuje jeden platný model Zeme. Pod individualizovaným modelom kvázigeoidu rozumieme DMQ nad príslušným referenčným elipsoidom (Besselov, Krasovského, GRS80, WGS84, ...). **Uprednostňujeme jeden model kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom GRS80.**





obr. 2 Štruktúrne podmienky vzťahov národného 2D polohového, 1D výškového referenčného systému a ETRS89.

Z obrázku (obr. 2) sú zrejmé štruktúry vzťahov medzi zobrazením, transformačnými parametrami, digitálnym modelom kvázigeoidu, resp. výškovým referenčným modelom a digitálnym modelom reliéfu. Na Slovensku sú používané zobrazenia J-Křovákovo(S-JTSK(Bessel)), G-Gauss-Krügerovo(S-42, S-42/83(Krasovský), S-Stereografické(Bessel), LH-Lokálne topocentrické s lokálnym horizontom nad referenčným elipsoidom  $e_i$ . Každé z týchto zobrazení musí mať vypočítané transformačné parametre do systému ETRS89. To znamená, že koľko je zobrazení, resp. realizácií súradnicového systému, toľko musí byť vektorov transformačných parametrov. Každý vektor transformačných parametrov má svoje vektory rezíduí odpovedajúce súradniciam príslušných identických bodov. Ale, a to treba zdôrazniť, existuje iba jeden DMQ, resp. DVRM a jeden DMR. Každý iný prístup k transformácii rovinných súradníc do ETRS89 narúša túto výhodnosť.

V ďalších častiach príspevku uvádzame postupne schémy prevodov medzi typmi súradníc, transformácií medzi systémami súradníc, modelovaniu reziduálnych zložiek realizácií súradníc, modelovaniu korekcií DMQ a jeho prevodu na DVRM- $B_{pv}$ , princípu určovania výšky kvázigeoidu pri zadaných rovinných súradniciach príslušného zobrazenia. Ďalej popisujeme princíp transformácie súradníc do a z ETRS89 **na povrchu elipsoidu**. Nakoniec uvádzame výsledky niektorých nezávislých testov reverzibilných transformácií súradníc z národných súradnicových sústav do ETRS89.

## 5.1 Postup výpočtu $DMRZ-JTSK_B$ , $DMRZ-JTSK_L$ pre transformáciu JTSK do ETRS89

Aby sme mohli modelovať prípadné zvyškové systematické mierkové a polohové nehomogenity SRS, je potrebné prijať základné pravidlo konzistentné s pravidlom „jedna Zem, jeden model Zeme, jeden DMQ, jeden DMR“, tak, že pre jeden referenčný súradnicový a výškový systém bude existovať iba jeden model reziduálnej zložky ako aj výškový

referenčný model. Na dodržanie tohto pravidla je potrebné dodržiavať v nasledujúcich podkapitolách uvedené postupy prípravy zdroja, postupov prevodov, zložených prevodov, transformácií a modelovania deformácií.

### 1) Dané:

ZDROJ	$x\tilde{y}h(JTSK(Bessel), Bpv)$
CIEL	$XYZ(ETRS89(GRS80))$ alebo $BLH(ETRS89(GRS80))$

#### 5.1.1 Postup prípravy zdroja

Aby sme mohli spustiť efektívny odhad štyroch transformačných parametrov na povrchu referenčného elipsoidu, musíme súradnice zdrojovej sústavy upraviť podľa schémy ( 1 ).

$$x\tilde{y}h(JTSK(Bessel)) \xrightarrow{P_1} B\tilde{L}H(H=0)(Bessel) \xrightarrow{P_2} X\tilde{Y}Z(Bessel) \xrightarrow{P_3} \xrightarrow{P_3} \overline{BLH}(H=0)(GRS80) \xrightarrow{P_4} \overline{XYZ}(GRS80), \quad (1)$$

kde postupne znamená :

- P<sub>1</sub> prevod súradníc  $x\tilde{y}$  (*JTSK*) na zemepisné súradnice  $B\tilde{L}$  (*Bessel*), nadmorská výška  $h$  sa transformáciou nemení a elipsoidická výška  $H$ , vzhľadom na metódu transformácie na povrchu referenčného elipsoidu, nemá význam, a preto sa nuluje. Ďalší dôvod je ten, že presný kvázigeoid DMQ definovaný nad Besselovým elipsoidom nepoznáme,
- P<sub>2</sub> prevod elipsoidických súradníc na karteziánske súradnice s parametrami Besselovho elipsoidu,
- P<sub>3</sub> prevod karteziánskych súradníc na elipsoidické s parametrami elipsoidu GRS80, pričom elipsoidická výška sa opäť vynuluje,
- P<sub>4</sub> prevod elipsoidických súradníc na karteziánske s parametrami elipsoidu GRS80.

#### 5.1.2 Výpočet parametrov transformácie na povrchu elipsoidu

Výsledkom výpočtu sú nasledujúce parametre :

- $B^T, L^T$  ťažisko zdrojovej sústavy s elipsoidom GRS80,
- $tB, tL$  translácia ťažiska zdrojovej sústavy do cieľovej sústavy,
- $uH$  rotácia okolo normály prechádzajúcej ťažiskom ( $B^T, L^T$ ),
- $ds$  mierkový faktor pre úpravu dĺžky geodetickej čiary zo zdroja do cieľa,
- $v_B, v_L$  opravy (rezíduá) v zdrojovej sústave ležiace na povrchu elipsoidu GRS80. Tieto sú ďalej predmetom modelovania prostredníctvom DMRZ.

#### **Transformácia na povrchu elipsoidu**

Jedná sa o štandardnú dvojrozmernú transformáciu elipsoidických súradníc na povrchu referenčného elipsoidu (bližšie pozri Leick [ 6 ], kap.13.2, str. 307), pri ktorých sa hodnota nadmorskej výšky, resp. elipsoidické výšky nemenia. Takýto postup odporučil aj Vaníček vo svojej prednáške na Katedre geodetických základov STU. Ďalej uvádzame niekoľko z dôvodov prečo :

- a) deformácie rovinných súradníc  $x, y$  v projekčnej rovine Křovákovho zobrazenia S-JTSK môžu dosahovať až 100 mm/km,
- b) neistota určenia výšky kvázigeoidu, resp. priebehu kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom  $e$  je neznáma,

- c) nadmorské výšky v systéme Bpv majú vysokú rozmerovú zhodu s normálnym metrom.

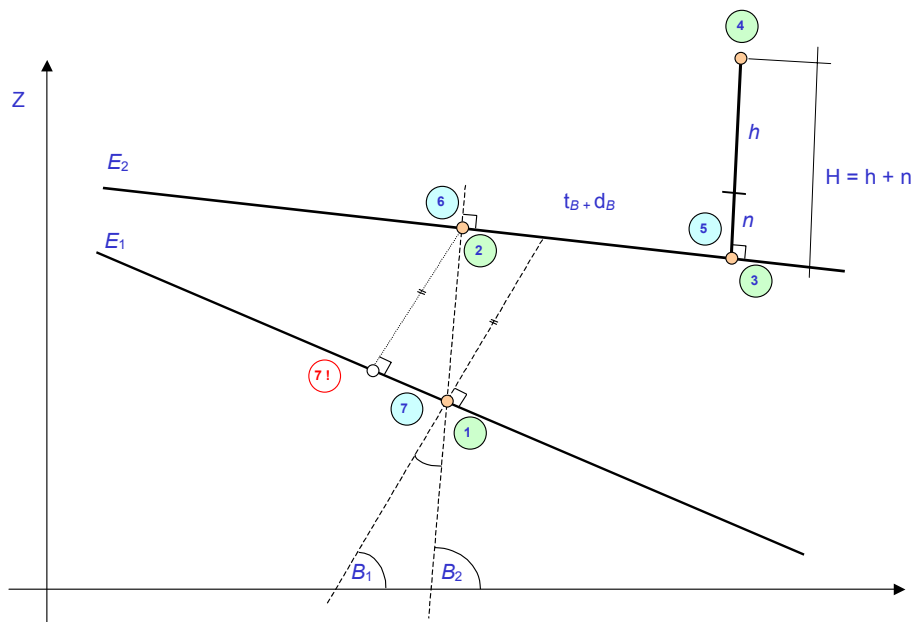
Princíp transformácie na povrchu elipsoidu využíva funkčné vzťahy :

- dĺžka geodetickej čiary,
- azimut geodetickej čiary a spätný azimut,
- ťažisko zdrojovej a cieľovej sústavy.

Odhadované sú 4 parametre

- translácia v smere  $tB$  a  $tL$ ,
- mierkový faktor  $k$ ,
- uhol pootočenia okolo normály  $H$  prebiehajúcej ťažiskom definičnej oblasti identických bodov platný pre všetky spojnice identických bodov s ťažiskom.

V ďalšej časti sú uvedené postupy prevodov a transformácií súradníc medzi národným súradnicovým systémom JTSK a európskym terestrickým súradnicovým systémom ETRS89. Pre systém nadmorských výšok platí pravidlo, že nebudú ovplyvnené mierkou platnou v polohovom systéme JTSK. Transformáciou nedochádza k zmene normálnej výšky  $h$ . Systém normálnych výšok Bpv je definovaný len nad modelom kvázigeoidu DMQ, ktorý je pre Slovensko jednoznačne vzťahnutý ku referenčnému elipsoidu GRS80. Preto, ak je potrebné určiť výšku kvázigeoidu  $n$  v bode definovanom súradnicami  $xyh$ (JTSK(Bessel)), tieto je potrebné najprv transformovať postupom podľa schémy uvedenej na obrázku obr. 3 na zemepisné súradnice  $BLh$ (ETRS89(GRS80)) a až v tomto bode vyinterpolovať výšku kvázigeoidu  $n = DMQ(B,L)$ . Bližšie pozri časť 5.1.5.



obr. 3 Schéma transformácie bodu medzi geocentrickými elipsoidmi  $e_1$  a  $e_2$  znázornená v meridiánovom reze.

### **Postup transformácie bodu z povrchu elipsoidu $e_1$ na a nad povrch elipsoidu $e_2$**

Je potrebné poznamenať, že elipsoid  $e_1$  je obvykle referenčný elipsoid, ktorého os rotácie je totožná s osou rotácie zemského elipsoidu reprezentovaného elipsoidom  $e_2$  GRS80. V skutočnosti referenčný Besselov elipsoid, použitý aj pre systém JTSK, nemá os rotácie totožnú s osou GRS80. Ich vzájomná odľahlosť sa dá vypočítať z translačných parametrov odhadnutých pomocou Molodenského-Badegasovho modelu, ktoré predstavujú vzájomnú priestorovú polohu počiatkov súradnicových karteziánskych sústav. Odhad translačných parametrov je nasledujúci  $\Delta X=558,469$  m,  $\Delta Y=68,541$  m a  $\Delta Z=452,762$  m. Potom odľahlosť osí rotácie  $p=562,659$  m. Priestorová vzdialenosť počiatkov je potom  $r=722,204$  m. Tieto skutočnosti uvádzame z dôvodov zdôraznenia dôležitosti transformácie bodu z povrchu jedného, zdrojového elipsoidu na cieľový (na obr. 3 znázornený postupnosťou bodov č.1 až č.7, resp. 7!). Vzhľadom na exaktnú transformáciu bodu medzi referenčnými elipsoidmi túto skutočnosť nesmieme zanedbať.

Ďalej nasleduje schematický popis postupnej priamej a inverznej transformácie bodu definovaného súradnicami  $B_1, L_1$ , ktoré definujú jednoznačnú polohu na geocentrickom elipsoide  $e_1$ . Tento bod označme bod č. 1. V tomto bode nepoznáme elipsoidickú výšku z dôvodu neznalosti modelu kvázigeoidu. Ak z geocentrického elipsoidu  $e_2$  spustíme kolmicu prechádzajúcu bodom č.1, potom priesečník tejto kolmice s elipsoidickou plochou  $e_2$  nám definuje bod č.2. Ak polohu bodu č. 2 korigujeme o príslušný účinok translačného parametra  $t_B$ , mierkový účinok  $d_s$  a príslušný účinok z pootočenia  $d_\alpha$ , dostaneme sa do bodu č.3. Vztýčením kolmice a vynesení elipsoidickej výšky, resp. vynesení výšky DMQ (DVRM) a normálnej výšky sa dostávame do skutočnej polohy bodu č. 4, ktorý je už v systéme ETRS89. Inverzná transformácia bodu č.4 na bod č.5 spočíva vo vynulovaní elipsoidickej výšky, ak polohu bodu č.5 korigujeme o inverzný účinok translácie, mierky a pootočenia, potom dostaneme sa do bodu č.6. Z bodu č.6 musíme spustiť kolmicu k elipsoidu  $e_2$ , tam, kde táto kolmica pretne elipsoid  $e_1$  dostávame bod č.7. (Poznámka. V tomto bode sa autor programového riešenia transformácie na povrchu elipsoidov dopustil chyby, ktorá sa neskôr veľmi ťažko a pracne hľadala. Premietal bod č. 6 po kolmici k elipsoidu  $e_1$ . Tým sme získali bod č.7!, ktorý nezabezpečoval reverzibilitnosť transformácie.). Pre overenie reverzibilitnosti transformácie musí platiť, že súradnice bodov 1 a 7, 2 a 6, 5 a 3 musia byť zhodné.

Z predchádzajúceho obrázku je zrejmé, že pri zanedbaní elipsoidickej výšky  $H_1$ , lebo minimálne v tomto prípade nemáme k dispozícii DMQ nad referenčným elipsoidom  $e_1$ , vzniká pri sedem parametrickej priestorovej transformácii prostredníctvom Molodenského-Badegasovho modelu vzťah medzi bodmi č.1 a č.3. Pri transformácii na povrchu elipsoidu  $e_2$  vzniká transformačný vzťah medzi bodmi č.2 a č.3.

Ďalej kvôli úplnosti uvádzame schematický prehľad zložených priamych prevodov a transformácií pôvodných realizácií súradníc do novej realizácie JTSK/03. Vzhľadom na skutočnosť, že spravujeme len jeden model kvázigeoidu, resp. jeden výškový referenčný model, uvádzame postup určenia výšky kvázigeoidu, resp. výškového referenčného modelu v bode zadanom rovinnými súradnicami.

#### **5.1.3 Typy zložených prevodov**

<b>a/ J do J03 – priamy prevod z JTSK do JTSK/03</b>
--

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{P_1} x\tilde{y}h(JTSK(Bessel)) \xrightarrow{P_1} \\
& \xrightarrow{P_1} B\tilde{L}H(H=0)(Bessel) \xrightarrow{P_2} X\tilde{Y}Z(Bessel) \xrightarrow{P_3} \\
& \xrightarrow{P_3} \overline{BL}H(H=0)(GRS80) + d\overline{BL}(DMRZ) = \overline{\overline{BL}}H(H=0)(GRS80) \xrightarrow{P_4} \\
& \xrightarrow{P_4} XYZ(GRS80) \xrightarrow{P_5} BLH(H=0)(Bessel) \xrightarrow{P_6} \\
& \xrightarrow{P_6} xyh(JTSK/03(Bessel))
\end{aligned} \tag{2}$$

Poznámka : Musí byť splnená základná podmienka nemennosti nadmorskej výšky  $h$ .

### b/ J03 do J – priamy prevod z JTSK/03 do JTSK

$$\begin{aligned}
& xyh(JTSK/03(Bessel), Bpv) \xrightarrow{P^1} \\
& \xrightarrow{P^1} BLH(H=0)(Bessel) \xrightarrow{P^2} XYZ(Bessel) \xrightarrow{P^3} \overline{\overline{BL}}H(H=0)(GRS80) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \overline{\overline{BL}}H(H=0)(GRS80) - d\overline{BL}(DMRZ) = \overline{BL}H(GRS80) \xrightarrow{P^5} \\
& \xrightarrow{P^5} X\tilde{Y}Z(GRS80) \xrightarrow{P^6} B\tilde{L}H(H=0)(Bessel) \xrightarrow{P^7} \\
& \xrightarrow{P^7} x\tilde{y}h(JTSK(Bessel), Bpv)
\end{aligned} \tag{3}$$

kde postupne znamená :

- $P^1$  prevod súradníc  $xy$  (JTSK/03) na zemepisné súradnice  $BL$  (Bessel), nadmorská výška  $h$  sa prevodmi nemení a elipsoidická výška  $H$  nemá význam, preto sa nuluje, kvázigeoid DMQ na Besselovom elipsoide nepoznáme,
- $P^2$  prevod elipsoidických súradníc na karteziánske súradnice s parametrami Besselovho elipsoidu,
- $P^3$  prevod karteziánskych súradníc na elipsoidické s parametrami elipsoidu GRS80, pričom elipsoidická výška sa opäť vynuluje,
- $P^5$  prevod elipsoidických súradníc na karteziánske s parametrami elipsoidu GRS80,
- $P^6$  prevod karteziánskych súradníc na elipsoidické s parametrami Besselovho elipsoidu,
- $P^7$  prevod elipsoidických súradníc do rovinných súradníc globálne aj lokálne zdeformovaných súradníc  $x\tilde{y}$  (JTSK).

platí : prevod  $P^7$  je inverzný k  $P^1$ ,  $P^6$  je inverzný k  $P^2$ .

#### 5.1.4 Typy transformácií

### JTSK do ETRS89

Zdrojové údaje pre transformáciu  $T^1$  musia byť v tvare zemepisných súradníc s parametrami elipsoidu GRS80, pričom polohu bodu je potrebné korigovať o účinok globálnej a lokálnej deformácie modelovanej prostredníctvom DMRZ :

$$\begin{aligned}
& \overline{BLH}(H=0)(JTSK(Bessel)) \xrightarrow{P_1} X\tilde{Y}Z(Bessel) \xrightarrow{P_2} \overline{BLH}(H=0)(GRS80) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \overline{\overline{BLH}}(H=0)(GRS80) = \overline{BLH}(H=0)(GRS80) + d\overline{BL}(DMRZ) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \overline{\overline{BLH}}(H=0)(GRS80) \xrightarrow{T_1} BLH(H=0)(ETRS89(GRS80)),
\end{aligned} \tag{4}$$

kde postupne znamená :

$T_1$	transformácia na povrchu elipsoidu s parametrami $B^T, L^T, tB, tL, ds, dA$ ,
$B^T, L^T$	zemepisné súradnice ťažiska zdrojovej sústavy,
$tB, tL$	translácia – posun ťažiska v smere zemepisných súradníc,
$ds$	mierkový koeficient na vyjadrenie mierky $1+ds$ ,
$dA$	pootočením geodetických čiar spájajúcich ťažisko a ľubovoľný bod transformácie,
$P^1$	prevod zemepisných súradníc na karteziánske s parametrami Besselovho elipsoidu,
$P^2$	prevod karteziánskych pravouhlých súradníc na zemepisné súradnice s parametrami elipsoidu GRS80,

### **ETRS89 do JTSK**

Východiskovým predpokladom predmetnej transformácie je znalosť polohy ľubovoľného bodu v systéme ETRS89 vyjadrenej v geodetických zemepisných súradniciach  $B, L$  a elipsoidickou výškou  $H$ . Pretože poznáme digitálny model kvázigeoidu DMQ, resp DVRM, ktorý je definovaný nad referenčným elipsoidom GRS80, môžeme vypočítať normálnu výšku  $h$  v systéme Bpv podľa vzťahu  $h = H - n$ , kde  $n = DVRM(B, L)$  získame interpoláciou z autorizovaného digitálneho výškového referenčného modelu. Aj v tomto vzťahu platí, že ľubovoľnou transformáciou a prevodom sa systém normálnych výšok nemení. Vzhľadom na skutočnosť, že body transformujeme zo systému ETRS89 do globálne a lokálne zdeformovanej projekčnej roviny definovanej systémom rovinných súradníc JTSK, je potrebné tieto korekcie interpolovať z digitálneho modelu reziduálnej zložky DMRZ. Získame ho pri odhade transformačných parametrov  $T(B^T, L^T, tB, tL, ds, dA)$ . Pre korekcie polohy bodov platí :  $dBL(DMRZ) = DMRZ(B, L)$ .

$$\begin{aligned}
& BLH(h = H - n(BL))(ETRS89(GRS80)) \xrightarrow{T_1^{-1}} \overline{\overline{BLH}}(H = h + n)(GRS80) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \overline{BLH}(GRS80) = \overline{\overline{BLH}}(GRS80) - d\overline{BL}(DMRZ) \xrightarrow{P_1} X\tilde{Y}Z(GRS80) \xrightarrow{P_2} \\
& \xrightarrow{P_2} \overline{BLH}(H = h + n)(JTSK, Bessel) \xrightarrow{P^1} \tilde{x}\tilde{y}h(JTSK(Bessel), Bpv)
\end{aligned} \tag{5}$$

### **JTSK/03 do ETRS89**

Postup je analogický ako pri transformácii JTSK do ETRS89, ale neuplatní sa interpolácia z DMRZ, hodnota  $d\overline{BL} = 0$ .

$$\begin{aligned}
& xyh(JTSK/03(Bessel), Bpv) \xrightarrow{P^1} \\
& \xrightarrow{P^1} \overline{BLH}(H=0)(Bessel) \xrightarrow{P^2} \overline{XYZ}(Bessel) \xrightarrow{P^3} \\
& \xrightarrow{P^3} \overline{BLH}(H=0)(GRS80) \xrightarrow{T_1} BLH(H=h+n(B,L))(ETRS89(GRS80)),
\end{aligned} \tag{6}$$

V predchádzajúcom vzťahu pre elipsoidickú výšku  $H$  sme využili znalosť normálnej výšky  $h$  a interpoláciou získanej výšky referenčného výškového modelu  $n(DVRM)$ . V prípade, že normálnu výšku  $h$  nepoznáme, ale máme k dispozícii digitálny model reliéfu DMR, využijeme interpolovanú hodnotu  $h = h(B,L) = DMR(B,L)$ .

### **ETRS89 do JTSK/03**

Postup je analogický ako pri transformácii ETRS89 do JTSK, ale neuplatní sa interpolácia z  $DMRZ(B,L)$ , hodnota  $d\overline{BL} = 0$ .

$$\begin{aligned}
BLH(h = H - n(B,L))(ETRS89(GRS80)) & \xrightarrow{T_1^{-1}} \overline{BLH}(H = h + n)(GRS80) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \overline{BLH}(GRS80) = \overline{BLH}(GRS80) \xrightarrow{P_1} XYZ(GRS80) \xrightarrow{P_2} \\
& \xrightarrow{P_2} BLH(H = h + n)(JTSK, Bessel) \xrightarrow{P^7} xyh(JTSK(Bessel), Bpv)
\end{aligned} \tag{7}$$

#### **5.1.5 Postup určenia výšky kvázigeoidu $n(B,L)$**

Nasledujúca postupnosť vzťahov vychádza z predpokladu, že máme k dispozícii v systéme ETRS89 definovaný digitálny model kvázigeoidu DMQ alebo digitálny výškový referenčný model DVRM. Tento model podlieha nepretržitému procesu spresňovania a procesu autorizácie. Autorizáciu vyhlasuje správca geodetických základov - GKÚ Bratislava.

Aké sú východiskové predpoklady?

- Systém JTSK je definovaný Besselovým referenčným elipsoidom, ktorého stred je vložený do počiatku  $\tilde{O}$  karteziánskeho 3D súradnicového systému  $X\tilde{Y}\tilde{Z}$ . Súradnicové osi sú totožné s orientáciou základných osí referenčného elipsoidu. Počiatok  $\tilde{O}$  nie je totožný s ťažiskom Zeme  $T$  ( $\tilde{O} \neq T$ ).
- Systém ETRS89 je definovaný elipsoidom GRS80. Jeho stred leží v počiatku  $O$  karteziánskeho 3D súradnicového systému  $XYZ$ . Počiatok  $O$  je totožný s ťažiskom Zeme  $T$  ( $O \equiv T$ ). Súradnicové osi sú totožné s orientáciou základných osí referenčného elipsoidu.

Vzhľadom na skutočnosť, že technológia určovania priestorovej polohy geodetického bodu GNSS bude musieť pracovať aj v súčasnosti stále platnom rovinnom súradnicovom a výškovom referenčnom systéme JTSK a Bpv, navrhujeme dole uvedené postupy určenia výšky kvázigeoidu v bode definovanom rovinnými súradnicami  $x, y$  v JTSK a JTSK/03.

**Vstup  $xy(JTSK)$  :**

$$\begin{aligned}
& \tilde{xy}(JTSK(Bessel)) \xrightarrow{P_1} \\
& \xrightarrow{P_1} \tilde{BLH}(H=0)(Bessel) \xrightarrow{P_2} \tilde{XYZ}(Bessel) \xrightarrow{P_3} \overline{\overline{BLH}}(H=0)(GRS80) = \\
& = \overline{BLH}(GRS80) + d\overline{BL}(DMRZ) \xrightarrow{T_1} BLH(ETRS89(GRS80)) \Rightarrow \\
& \Rightarrow n(B,L) = DMQ(B,L)
\end{aligned} \tag{8}$$

**Vstup xy(JTSK/03) :**

$$\begin{aligned}
& xy(JTSK/03, Bessel) \xrightarrow{P_1} \\
& \xrightarrow{P_1} BLH(H=0)(Bessel) \xrightarrow{P_2} XYZ(Bessel) \xrightarrow{P_3} BL(GRS80) \xrightarrow{T_1} \\
& \xrightarrow{T_1} BL(ETRS89, GRS80) \Rightarrow \\
& \Rightarrow n = DMQ(BL)
\end{aligned} \tag{9}$$

## **6 Transformácia normálnej výšky Bpv na geodetickú v ETRS89 a opačne**

Na transformáciu normálnych výšok referenčného výškového systému Bpv na geodetickú v systéme ETRS89 je potrebná znalosť výšky kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom GRS80, prípadne výšky referenčného modelu. V nasledujúcich podkapitolách uvádzame podrobný popis vzniku presného regionálneho DMQ pre územie Slovenska využívajúceho základné gravimetrické mapovanie v mierke 1:25 000.

### **6.1 Genéza vzniku Regionálneho kvázigeoidu Slovenska v pôsobnosti ÚGKK SR**

V roku 1993, aj vzhľadom na nástup technológií GNSS a zrejmej potreby priameho prevodu GPS elipsoidických výšok na normálne, bol vypočítaný historicky prvý gravimetrický regionálny kvázigeoid Slovenska [ 15 ]. V roku 1995 si GKÚ objednal spresnenie 1. kvázigeoidu na Katedre geodetických základov SvF STU. Výsledkom bol gravimetrický kvázigeoid verzia 95 (ďalej DMQ95). V roku 1996 sa v rámci vedecko-technického rozvoja objednala transformácia gravimetrického kvázigeoidu DMQ95, do systému ETRS89, čím vznikla verzia DMQ96 [ 11 ]. V roku 1998 sa pokračovalo v spresňovaní kvázigeoidu DMQ96 a v rámci vedecko – technického rozvoja si VÚGK objednal výpočet spresneného gravimetrického kvázigeoidu s označením GMSQ98BF. Od roku 1995 bol riešiteľom všetkých úloh Mojzeš s kolektívom spolupracovníkov z Katedry geodetických základov Stavebnej fakulty STU [ 12 ], [ 13].

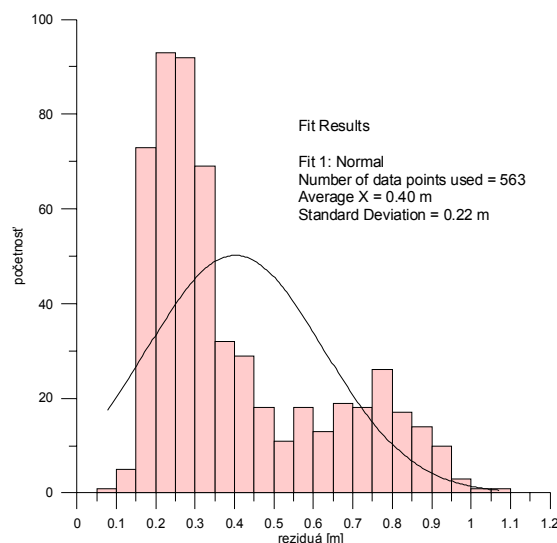
Na GKÚ bol GMSQ98BF otestovaný na množine 563 nivelačných bodov. Histogram rezíduí je na obr. 11. Kvázigeoid vykazuje systematický posun voči výškovému systému Bpv cca 2 cm. Do intervalu spoľahlivosti  $1\sigma$  ( $\sigma=51$  mm) spadá 72% testovaných bodov, do  $2\sigma$  spadá 94% bodov, do  $3\sigma$  spadá 98% bodov. Tento starší model kvázigeoidu [ 12], [ 13], bol autormi výškovo naviazaný (nafitovaný) na 42 bodov SGRN. Potvrdila sa síce normalita rozdelenia rezíduí, ale voči testovacím bodom vykazuje takto spresnený kvázigeoid vychýlenosť.



Vzhľadom na to, že výsledky testovania poskytli uspokojivé výsledky, model kvázigeoidu GMSQ98BF bol na GKÚ využívaný na všetky výpočty súvisiace s určovaním priestorovej polohy pomocou GNSS.

Vzhľadom na narastanie využiteľnosti technológií GNSS je neustála potreba zvyšovať kvalitu DMQ. Preto v roku 2003 bol opäť na návrh správcu geodetických základov, v rámci VTP prostredníctvom VÚGK objednaný výpočet ďalšej verzie gravimetrického kvázigeoidu, ktorá mala využívať vyššie členy rozvoja. Označujeme ho GMSQ03B [ 14 ]. Aj tento kvázigeoid správca geodetických základov po prevzatí otestoval na tej istej skupine bodov ako predchádzajúcu verziu. Histogram rezíduí je uvedený na obr. 4. Ako vidno z obrázku, rezíduá vykazujú systematický posun v priemere až 40 cm medzi výškami gravimetricko-nivelačného kvázigeoidu určeného z nivelačných výšok systému Bpv a geodetickými výškami systému ETRS89 a výškami určených z modelu gravimetrického kvázigeoidom GMSQ03B. Preukázal sa vážny rozpor medzi tvrdením autorov uvedeným v kap. 2.3 odovzdávacej správy [ 14 ] a našimi výsledkami. Ukázalo sa, že posledná realizácia kvázigeoidu GMSQ03B má výrazne horšiu výškovú orientáciu ako jeho skoršia verzia GMSQ98BF. Rozdiely dosiahli na východnom Slovensku až metrové hodnoty, pozri obr. 5. Vzhľadom na túto skutočnosť sme museli konštatovať, že kvázigeoid GMSQ03B nespĺnil cieľ zadania VTP. Správca GZ ho bez dodatočných úprav a korekcií nemohol používať.

V snahe odstrániť túto „vadu“ sme modelovali rozdiely medzi kvázigeoidom a referenčnými hodnotami získanými z GPS a nivelačných meraní na bodoch ŠPS. Príslušné hodnoty interpolované z modelu rozdielov sme pripočítali k hodnotám kvázigeoidu GMSQ03B, a tak sme dostali nový referenčný model, ktorý sme označili ako **Digitálny výškový referenčný model Bpv (ďalej DVRM-Bpv)**.



obr. 4 Histogram rezíduí z testovania GMSQ03B na 563 testovacích bodoch

V ďalšej podkapitole je uvedený podrobný rozbor určenia digitálneho výškového referenčného modelu DVRM-Bpv.

## 6.2 Postup výpočtu DVRM-Bpv

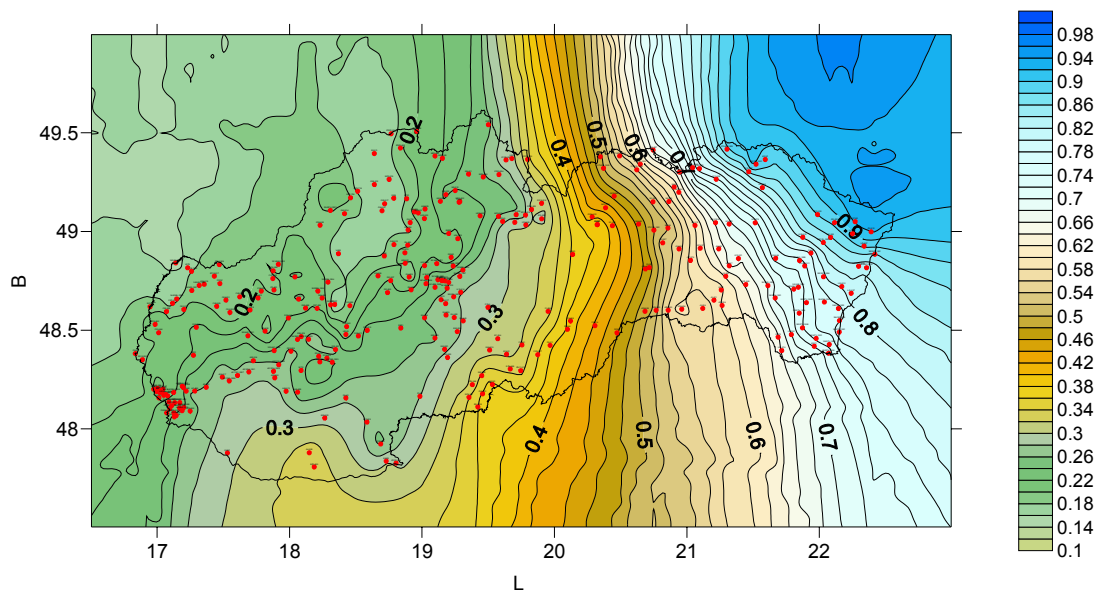
Spresnenie dodaného kvázigeoidu GMSQ03B sme vykonali pomocou jeho fitovania na 304 bodov ŠPS vrátane SGRN. Na týchto testovacích bodoch poznáme presné hodnoty

elipsoidických výšok v systéme ETRS89 a nivelované normálne výšky v systéme Bpv. Zo získaných rezíduí sme vytvorili digitálny model rezíduálnej zložky DMRZ-GMSQ03B:

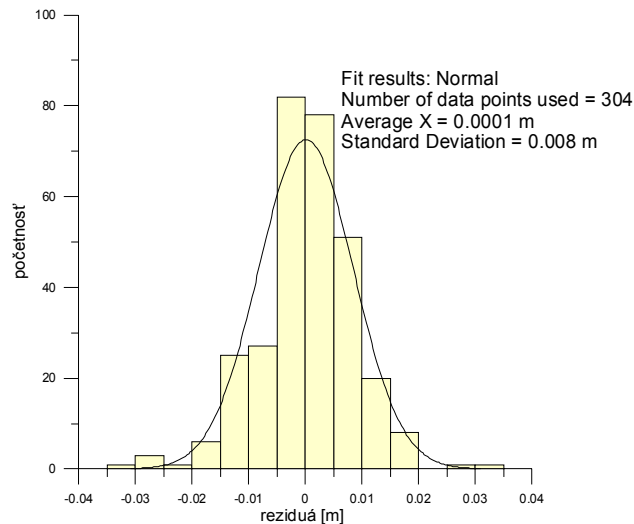
GKÚ Bratislava od roku 2000 buduje a spravuje Štátnu priestorovú sieť (ŠPS) ako integrovanú sieť, to znamená, že v súčasnosti viac ako polovica bodov ŠPS má súčasne určenú priestorovú polohu v systéme ETRS89 ( $BLH$ ) a nadmorskú výšku  $h$  veľmi presnou niveláciou v systéme Bpv.

Presnosť určenia elipsoidickej výšky bodov ŠPS dosahuje hodnoty do 20 mm. Na fitovanie DMQ bola vybraná len taká skupina bodov, na ktorých boli z dôvodov určenia priestorovej polohy uskutočnené min. dve nezávislé 6-hodinové observácie. Tým bola minimalizovaná nepresnosť v určení elipsoidickej výšky  $H$ . Ich rozmiestnenie je znázornené na obr. 5.

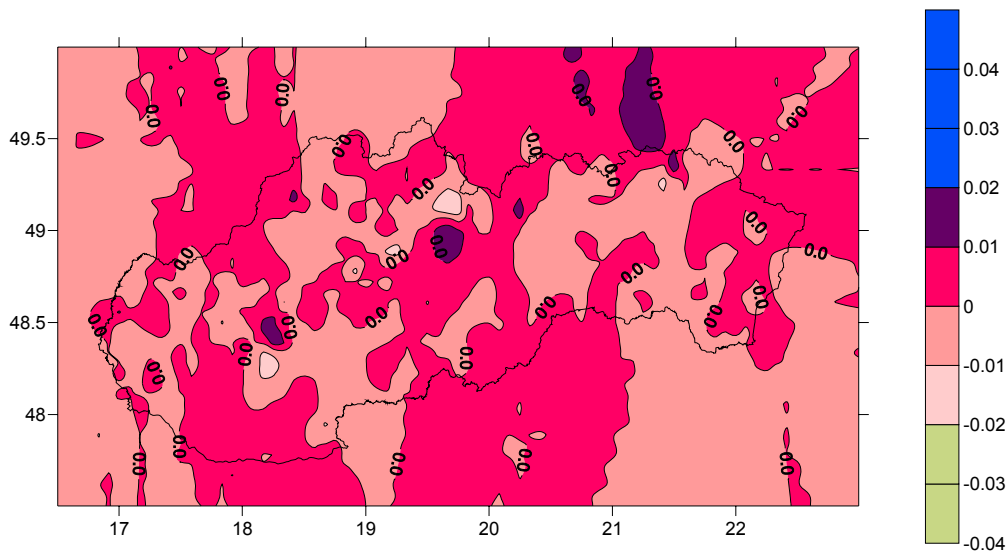
Na spresnenie priestorovej polohy kvázigeoidu GMSQ03B nad referenčným elipsoidom GRS80 boli použité rozdiely medzi nadmorskou výškou  $h$  získanou veľmi presnou niveláciou a výškou  $h' = H - n$ , určenej ako rozdiel geodetickej výšky systému ETRS89 a výšky  $n$  kvázigeoidu GMSQ03B nad referenčným elipsoidom GRS80. Z týchto rozdielov bol vytvorený metódou kriging s krokom  $200'' \times 300''$  programom SURFER 8 digitálny model rezíduálnej zložky DMRZ-GMSQ03B. Definičná oblasť vymedzená rozsahom  $47.50278^\circ < B < 49.99722^\circ$ ;  $16.50417^\circ < L < 22.99583^\circ$  bola rozdelená na  $46 \times 79 = 3634$  uzlových bodov - priesečníkov). Je znázornená na obr. 5. Histogram rezíduí na fitovacích bodoch je na obr. 6, stredná chyba dosahuje hodnotu do 1 cm. Plošné rozloženie rezíduí je znázornené na obr. 7.



obr. 5 Model zvyškovej korekcie DMRZ-GMSQ03B vrátane bodov použitých na jeho modelovanie, interval izočiar je 0,02 m



obr. 6 Histogram rozdelenia výškových rezíduí na 304 fitovacích bodoch



obr. 7 Plošné rozloženie rezíduí, interval izočiar 0.01 m

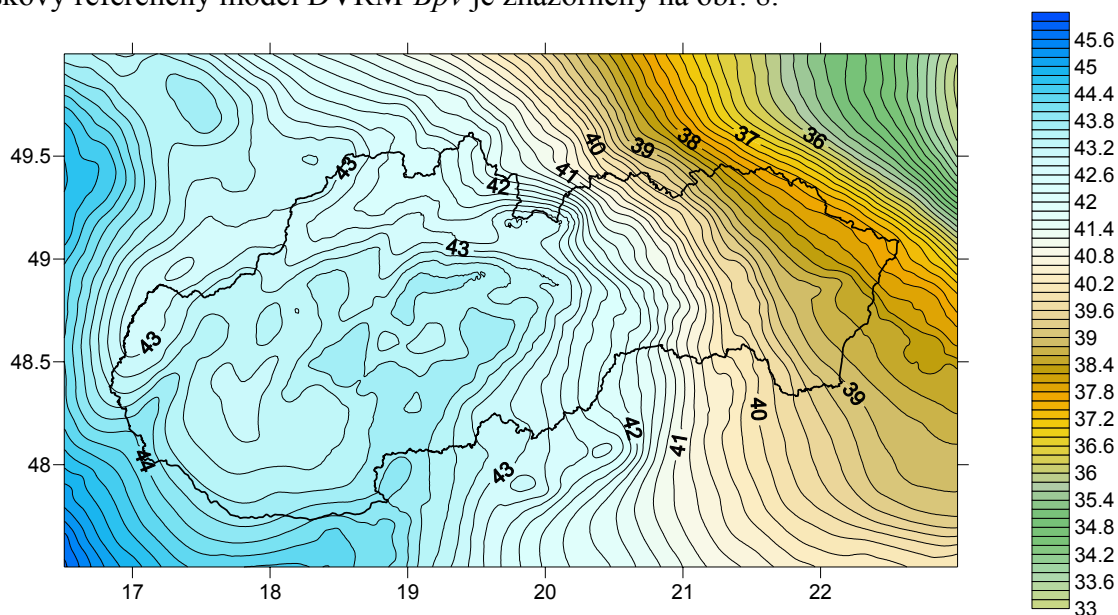
Z rozdelenia výškových rezíduí a z realizácie testovacej štatistiky  $\sigma$  môžeme konštatovať, že akceptačný interval s konfidenciou  $3\sigma$  má výšku 24 mm. Histogram rozdelenia potvrdzuje normalitu a nevychýlenosť.

### 6.3 Výpočet digitálneho výškového referenčného modelu DVRM

V predchádzajúcom kroku vytvorený digitálny model reziduálnej výškovvej zložky DMRZ-*GMSQ03B* bol použitý podľa vzťahu ( 10 ). Na výpočet spresnenej výšky  $n$  interpolovanej z DVRM-*Bpv* sme aplikovali bikubickú splajnovú interpolačnú metódu [ 2 ] realizovanú v programe *DTplus* [ 5 ]. Rozsah DVRM-*Bpv* je vymedzený oblasťou  $\langle 47.50833^\circ < \mathbf{B} < 49.99166^\circ; 16.51250^\circ < \mathbf{L} < 22.98750^\circ \rangle$  s krokom  $\Delta B \times \Delta L = 20'' \times 30''$ .

$$n_{\text{DVRM-Bpv}} = n'_{\text{GMSQ03B}} - k_{\text{DMRZ-GMSQ03B}}, \quad (10)$$

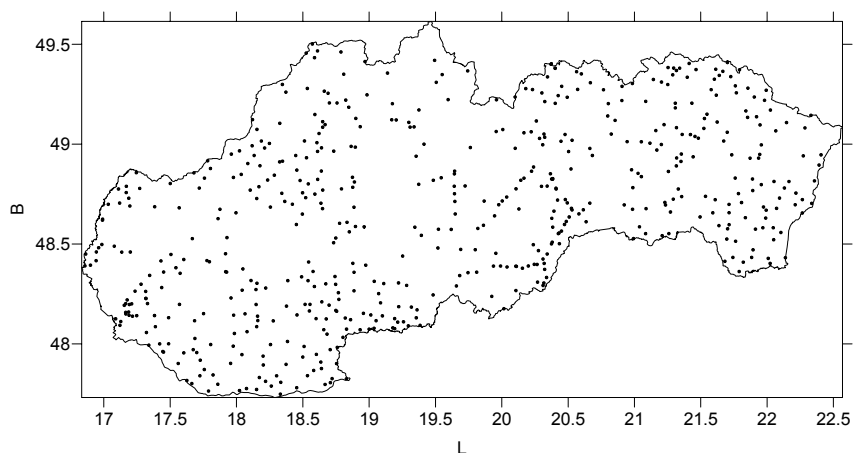
kde  $n$  je výška výškovej referenčnej plochy,  $n'$  je výška nefitovanej plochy kvázigeoidu GMSQ03B,  $k$  je zvyšková korekcia interpolovaná z DMRZ-GMSQ03B. Vypočítaný digitálny výškový referenčný model DVRM- $B_{pv}$  je znázornený na obr. 8.



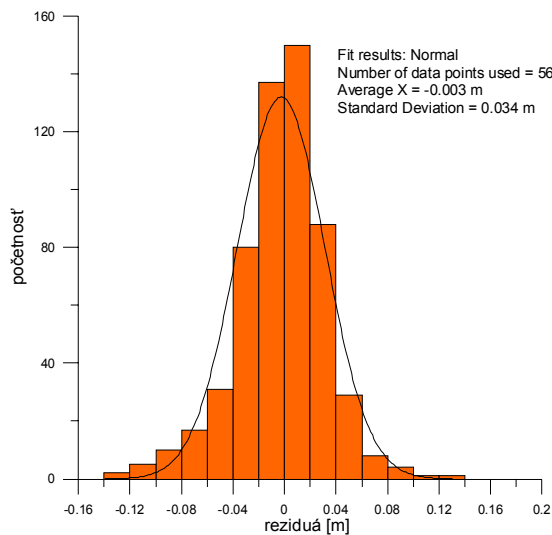
obr. 8 Digitálny výškový referenčný model DVRM- $B_{pv}$

#### 6.4 Testovanie DVRM- $B_{pv}$ nezávislou množinou bodov ŠPS

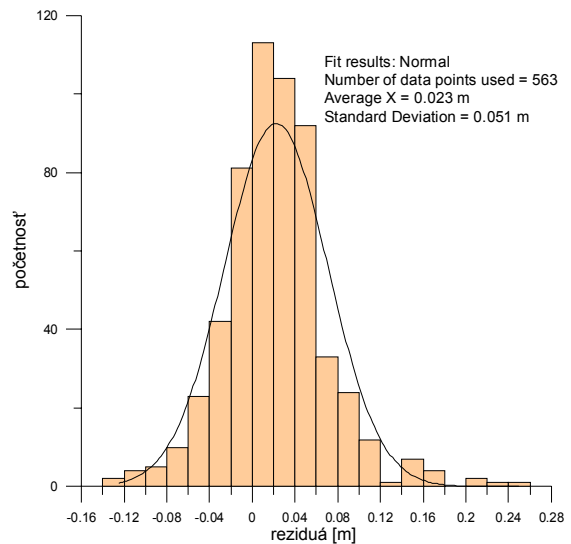
DVRM- $B_{pv}$  bol nezávisle testovaný množinou 563 bodov ŠPS. Elipsoidické výšky týchto bodov boli zamerané jedenkrát technológiou GPS. Minimálna observačná doba bola šesť hodín. Stredná chyba určenia elipsoidickej výšky v systéme ETRS89 je odhadovaná na 20 mm. Nadmorskú výšku majú súčasne určenú technológiou veľmi presnej nivelácie. Ich rozmiestnenie je zobrazené na obr. 9. Histogram rezíduí získaný z testovania DVRM- $B_{pv}$  na testovacích bodoch je znázornený na obr. 10. Stredná chyba dosiahla 34 mm. Normalita a nevyčýlenosť bola potvrdená. **Akceptačný interval o šírke  $3\sigma$  má výšku 102 mm.**



obr. 9 Rozmiestnenie nezávislých bodov na testovanie DVRM- $B_{pv}$  a DMQ-GMSQ98BF



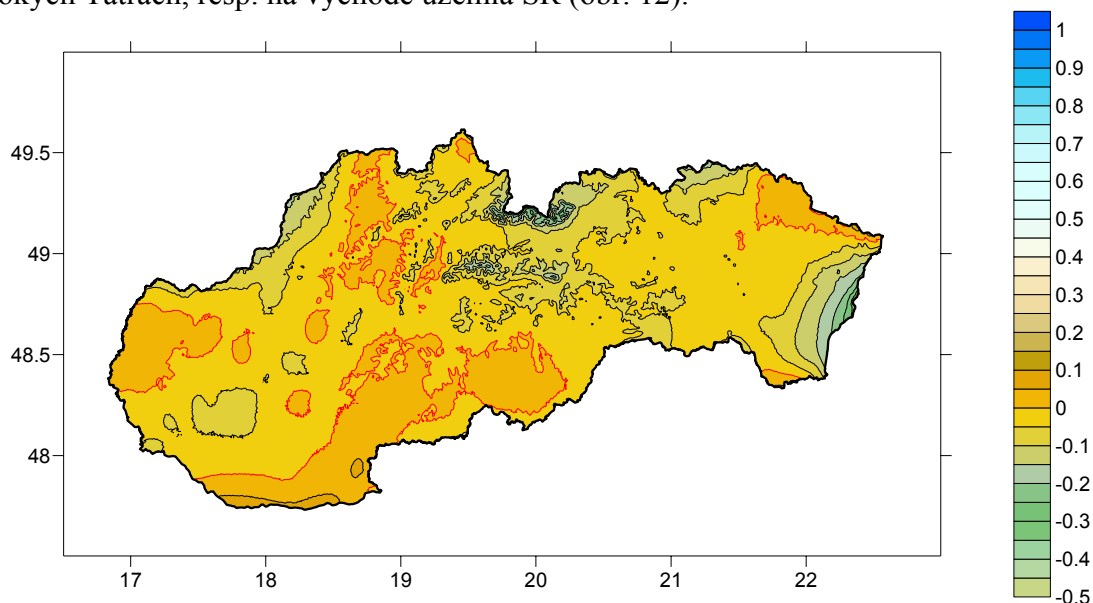
obr. 10 Histogram rozdelenia rezíduí z testovania DVRM-*Bpv* na 563 nezávislých testovacích bodoch



obr. 11 Histogram rozdelenia rezíduí z testovania DMQ-*GMSQ98BF* na 563 nezávislých testovacích bodoch

## 6.5 Porovnanie kvázigeoidu GMSQ98BF a DVRM-Bpv

Plošné porovnanie rozdielov výšok kvázigeoidu GMSQ98BF a digitálneho výškového referenčného modelu DVRM-*Bpv* bolo vykonané v bodoch rastra DVRM-*Bpv* s krokom 20x30". Výsledky porovnania ukázali, že rozdiely medzi kvázigeoidom GMSQ98BF a DVRM-*Bpv* sa pohybujú od 100 mm na juhozápadnom Slovensku po -250 mm vo Vysokých Tatrách, resp. na východe územia SR (obr. 12).

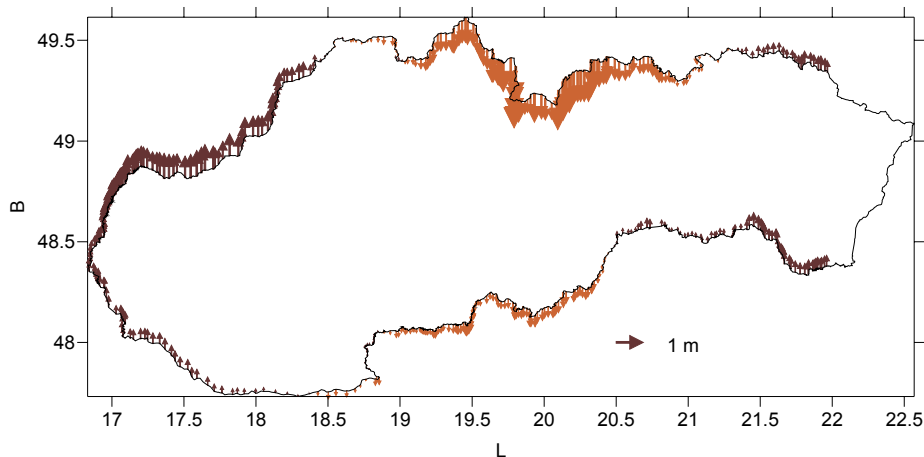


obr. 12 Grafické znázornenie rozdielov výšok DVRM-*Bpv* a kvázigeoidu GMSQ98BF (interval izočiár 0,05 m)

## 6.6 Porovnanie DVRM-Bpv a modelu kvázigeoidu pre oblasť strednej Európy

Cieľom každého modelu je, aby spojitou naväzoval na podobné modely susedných štátov, resp. bol homogénny s nadregionálnymi modelmi. Na porovnanie DVRM-Bpv sme použili model kvázigeoidu pre strednú Európu (riešenie VÚGTK 2004), ktorý je vzťahnutý k referenčnému rámcu ETRF89, reprezentovanému sieťou EUVN.

Na obr. 13 sú znázornené rozdiely medzi DVRM-Bpv a stredo európskym kvázigeoidom pozdĺž štátnych hraníc Slovenska. Rozdiely nadobúdajú hodnoty (-1,5m ; 1,0m). Najväčšie rozdiely sa vyskytujú v tatranskej oblasti.



obr. 13 Porovnanie DVRM-Bpv a kvázigeoidu pre strednú Európu

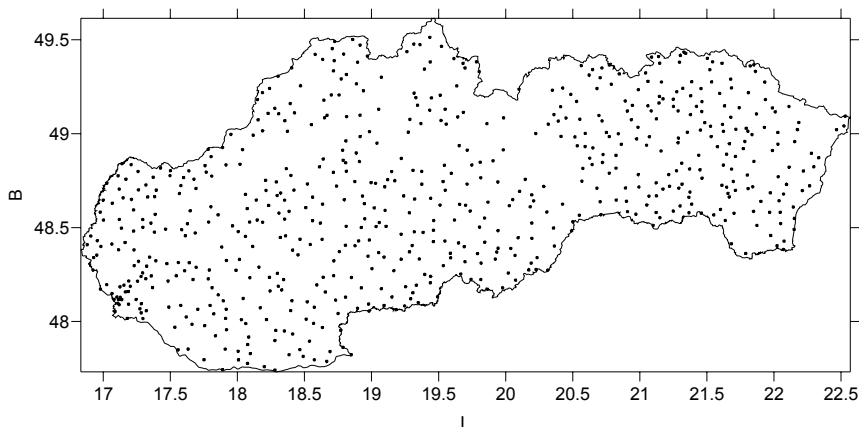
Detailné porovnanie poslednej verzie DMQ pre Českú republiku nie je predmetom tohto príspevku. Harmonizácia s českým kvázigeoidom bude predmetom ďalšej spolupráce.

## 7 Výpočet transformačných parametrov a DMRZ národných súradnicových systémov do ETRS89

V roku 2005 bolo zrealizované stochastické spojenie všetkých meračských kampaní vykonaných v ŠPS za obdobie rokov 2000 až 2004. Boli pripojené do systému ETRS89 prostredníctvom Slovenského terestrického referenčného rámcu SKTRF 2003 [ 10]. Z celkového počtu 1520 bodov ŠPS bolo 649 prevzatých zo ŠTS s pôvodnými súradnicami v S-JTSK, S-42 a S-42/83. Rozmiestnenie týchto identických bodov je znázornené na obr. 14. Realizácie súradníc v príslušných súradnicových systémoch boli použité na výpočet nasledujúcich transformačných vzťahov :

- JTSK ↔ ETRS89,
- JTSK/03 ↔ ETRS89,
- S-42 ↔ ETRS89,
- S-42/83 ↔ ETRS89,
- S-42/03 ↔ ETRS89,
- S-42/83/03 ↔ ETRS89.

Z dôvodov neznalosti presného priebehu kvázigeoidu nad Besselovým a Krasovského elipsoidom a súčasne z dôvodov už skôr uvedených, sme pristúpili k výpočtu transformačných parametrov 2D transformácie **na povrchu referenčného elipsoidu GRS80, bez uváženia výšok.**



obr. 14 Rozmiestnenie identických bodov pre výpočet transformačných parametrov

V nasledujúcich podkapitolách kapitoly 7 postupne uvádzame realizácie transformačných parametrov a digitálnych modelov reziduálnej polohovej zložky.

## 7.1 Odhad transformačných parametrov S-JTSK ↔ ETRS8

V tab. 1 uvádzame dosiahnuté hodnoty parametrov transformačného kľúča S-JTSK (zdrojová sústava) → ETRS89 (cieľová sústava). Vzhľadom na to, že polohová presnosť súradníc  $x, y$  v JTSK je niekoľkokrát menšia ako v ETRS89, zvolili sme váhy zdrojovej a cieľovej sústavy v pomere 1:25, tj. váha zdroja = 1 a váha cieľa = 25.

tab. 1 Transformačné parametre JTSK → ETRS89 na povrchu elipsoidu GRS80

<i>Parameter</i>	<i>hodnota</i>	<i>smerodajná odchýlka</i>
$B^T, L^T$ ťažisko zdrojovej sústavy s elipsoidom GRS80	$B^T = 48^\circ 40' 02''.592888,$ $L^T = 19^\circ 26' 27''.162490$	
$tB, tL$ translácia ťažiska zdrojovej sústavy do cieľovej sústavy	$tB = -3''.699580$ $tL = -5''.919658$ $tH = 0$	$\sigma_{tB} = 0''.001622$ $\sigma_{tL} = 0''.001623$
$uH$ rotácia v ťažisku ( $B^T, L^T$ ) okolo normály prechádzajúcej ťažiskom	$uH = -13''.439771$	$\sigma_{uH} = 0''.084$
$ds$ mierkový faktor pre úpravu dĺžky geodetickej čiary zo zdroja do cieľa	$ds = -104.006525 \text{ mm/km}$	$\sigma_{ds} = 0.31 \text{ mm}$

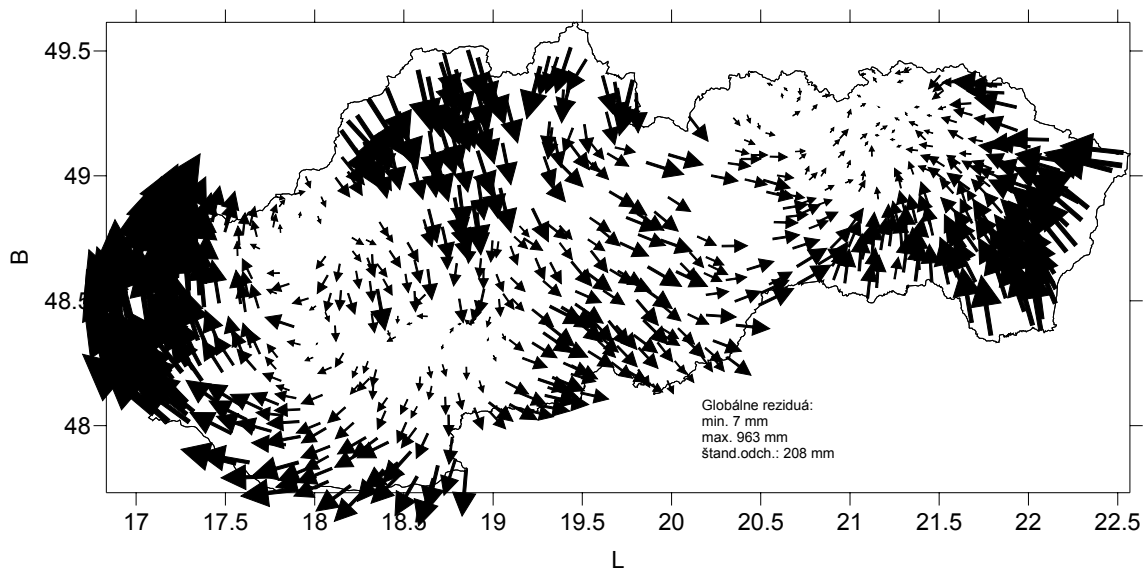
### 7.1.1 Výsledky charakterizujúce vzájomný vzťah S-JTSK a ETRS89

Rezíduá na identických bodoch  $v_B, v_L$  na povrchu elipsoidu sú znázornené na obr. 15. Rozsah absolútnych hodnôt globálnych rezíduí leží v intervale  $< 7 ; 963 >$  mm. Štandardná odchýlka rezíduí pre smer **sever-juh je 317 mm**, interval spoľahlivosti  $1\sigma$  pokrýva 70% identických

bodov. Štandardná odchýlka rezíduí pre smer **východ-západ** je **219 mm**, interval spoľahlivosti  $1\sigma$  pokrýva 70% identických bodov. Histogramy rozdelenia globálnych rezíduí sú znázornené na obr. 16.

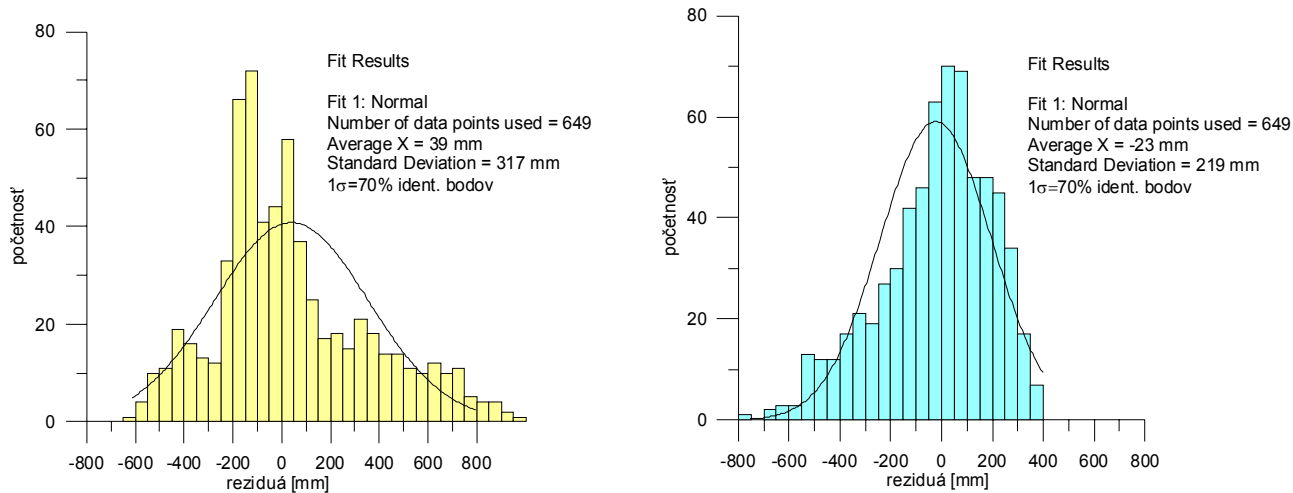
Tieto rezídua boli predmetom modelovania. Využili sme štandardné nástroje programu SURFER ver. 8.0, s cieľom vytvoriť **digitálne modely rezíduálnych zložiek DMRZ**  $v_B$  a  $v_L$  v príslušných smeroch **zemepisných súradníc**, ktoré predstavujú korekciu nehomogénnej deformácie realizácie systému S-JTSK. Na modelovanie bola použitá metóda kriging s krokom gridu 5,5 x 5,5 km. Získali sme 129x47 priesečníkov. Rozsah modelov pre obidve zložky geodetických súradníc je  $47.4^\circ < B < 49.7^\circ$ ;  $16.4^\circ < L < 22.8^\circ$ . Označenie modelov je **DMRZ-JTSK<sub>B</sub>** a **DMRZ-JTSK<sub>L</sub>** a sú zobrazené na obr. 18.

Diferenciálne (zvýškové) rezíduá, ktoré vznikli ako rozdiel modelových hodnôt korekcií a globálnych pôvodných rezíduí (z ktorých boli modely vytvorené), sú znázornené na obr. 17. Mierka zobrazenia rezíduí na obr. 15 a obr. 17 nie je rovnaká. Diferenciálne rezíduá sme v pomere ku globálnym kvôli grafickému znázorneniu zväčšili 10x. Rozsah diferenciálnych rezíduí je v intervale  $< 0 ; 77 >$  mm, štandardné odchýlky pre smer sever-juh aj východ-západ dosiahli hodnotu 14 mm. Interval spoľahlivosti  $1\sigma$  pre smer sever-juh pokrýva 75% identických bodov, pre smer východ-západ 77% identických bodov. Histogramy rozdelenia diferenciálnych rezíduí sú znázornené na obr. 19.

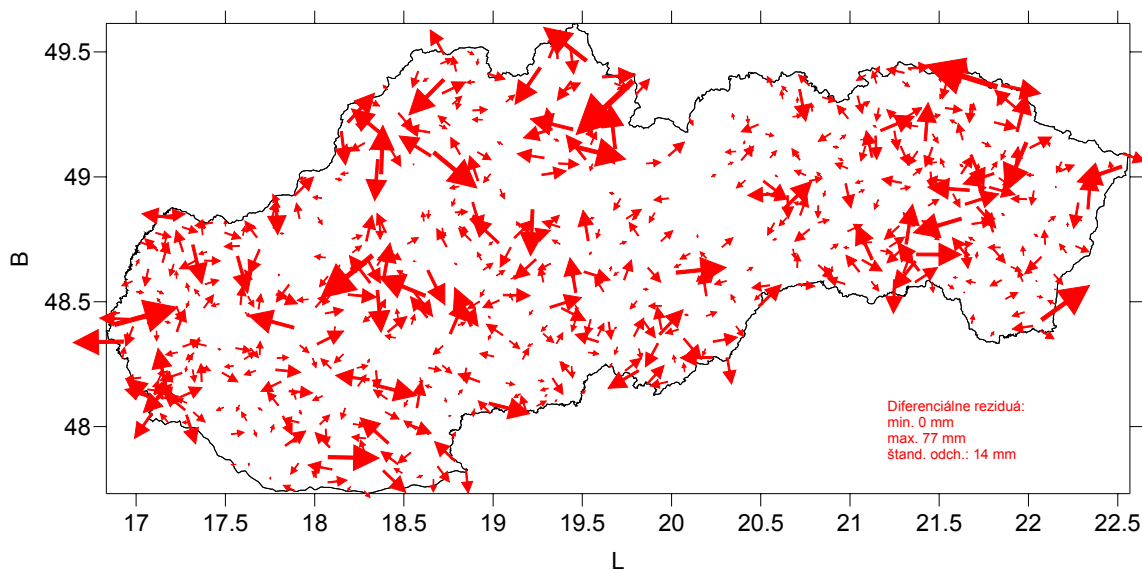


obr. 15 Globálne rezíduá (JTSK – ETRS89) na identických bodoch

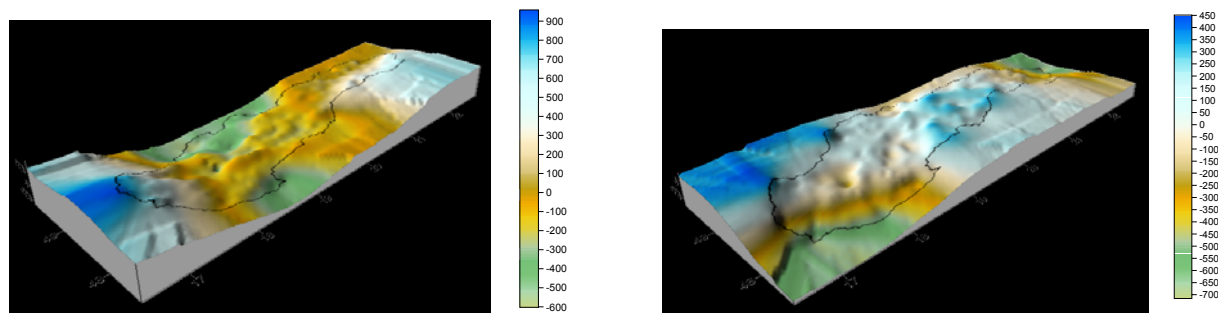




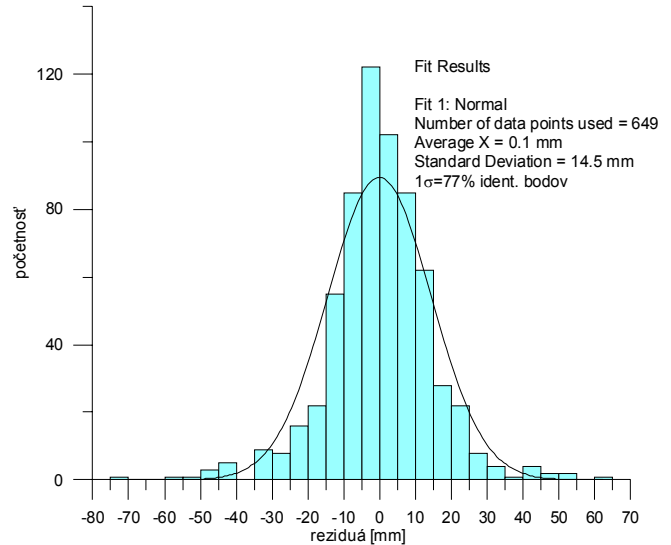
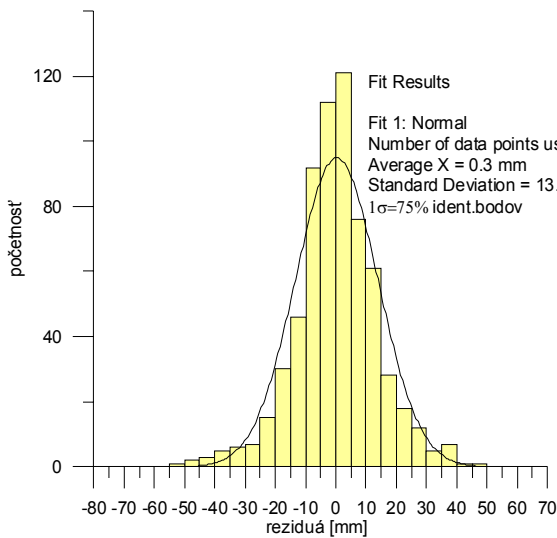
obr. 16 Histogramy rozdelenia globálnych rezíduí vzt'ahu JTSK – ETRS89 pre smer sever-juh a východ-západ



obr. 17 Diferenciálne rezíduá vzt'ahu JTSK – ETRS89 na identických bodoch



obr. 18 Vizualizácia DMRZ- $JTSK_B$  a DMRZ- $JTSK_L$



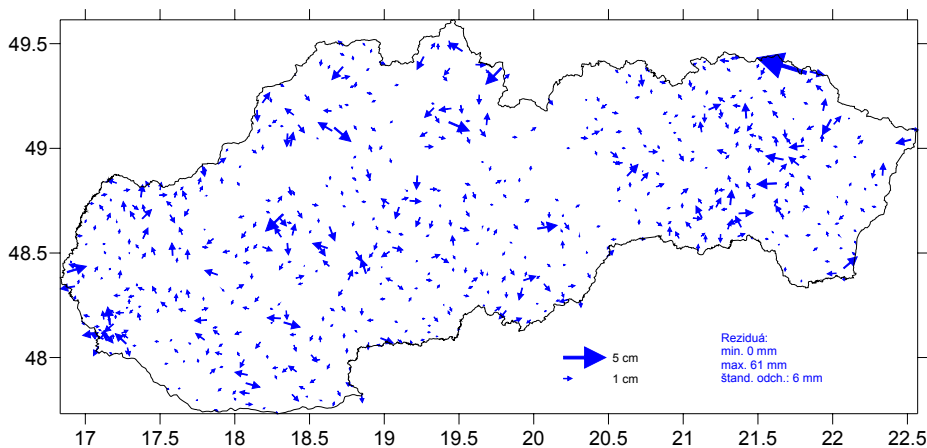
obr. 19 Histogramy rozdelenia diferenciálnych rezíduí dB a dL pre vzťah JTSK – ETRS89

### 7.1.2 Výpočet novej realizácie súradníc JTSK/03

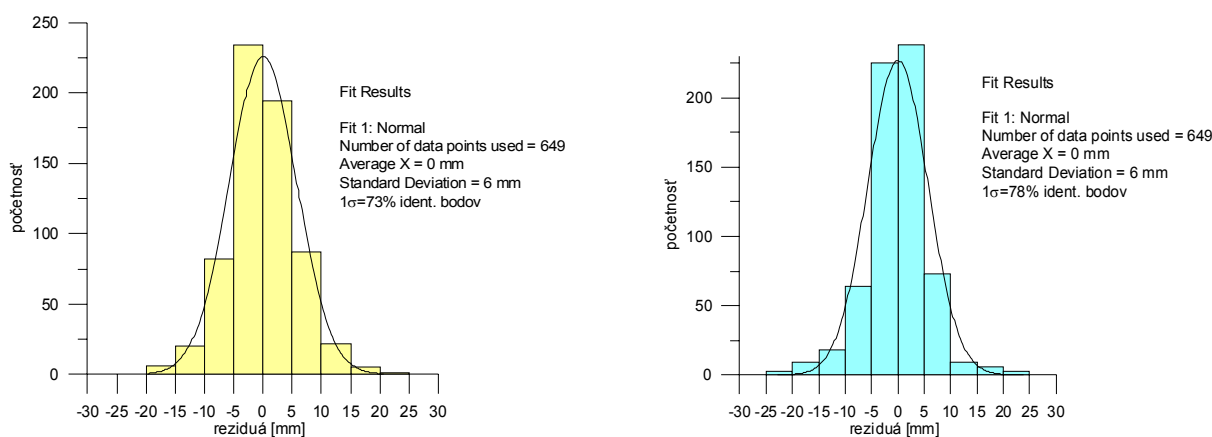
Elimináciou globálnej a lokálnej deformácie z pôvodnej realizácie súradníc JTSK použitím digitálnych modelov reziduálnych zložiek, sme vypočítali novú realizáciu systému JTSK. Označujeme ju JTSK/03.

Na analýzu presnosti a správnosti JTSK/03 voči ETRS89 sme vykonali opakovanú transformáciu realizácie JTSK/03 do ETRS89 metódou transformácie na povrchu elipsoidu GRS80. Vzhľadom na to, že polohovú presnosť JTSK/03 už považujeme za rovnocennú s presnosťou ETRS89, zvolili sme rovnaké váhy zdrojovej aj cieľovej sústavy, a to rovné jednej.

Rozsah absolútnych hodnôt rezíduí na identických bodoch je v intervale  $< 0 ; 61 >$  mm. Rezíduá sú znázornené na obr. 20. Štandardná odchýlka rezíduí **pre smer sever-juh je 6 mm**, interval spoľahlivosti  $1\sigma$  pokrýva 73% identických bodov,  $2\sigma$  pokrýva 95% identických bodov,  $3\sigma$  pokrýva 99% identických bodov. To znamená, že zo sto transformovaných bodov je 99 pokrytých  $3\sigma$  konfidenčnou oblasťou o **polomere konfidencie 18 mm**. Štandardná odchýlka rezíduí **pre smer východ-západ je 6 mm**, interval spoľahlivosti  $1\sigma$  pokrýva 78% identických bodov,  $2\sigma$  pokrýva 95% identických bodov,  $3\sigma$  pokrýva 98% identických bodov. Histogramy rozdelenia rezíduí sú znázornené na obr. 21.



obr. 20 Globálne rezíduá z opakovanej transformácie JTSK/03 do ETRS89



obr. 21 Histogramy rozdelenia rezíduí JTSK/03 – ETRS89 pre smer sever-juh a východ-západ

Dosiahnuté histogramy rozdelenia rezíduí vykazujú normalitu a nevychýlenosť. Akceptačná oblasť o polomere  $3\sigma$  dosahuje polomer 18 mm.

Porovnaním parametrov transformácie medzi JTSK→ETRS89 a JTSK/03→ETRS89 (tab. 2) sa nepreukázal ani pri jednom parametre signifikantný rozdiel. Čo v konečnom dôsledku znamená, že eliminácia globálnej a lokálnych deformácií prostredníctvom DMRZ- $JTSK_B$  a DMRZ- $JTSK_L$  je pre množinu identických bodov spoľahlivo eliminovaná. Rozdiel mierkových faktorov spôsobuje napr. pre maximálnu dĺžku od ťažiska siete 300 km chybu cca 2 mm. Rozdiel v pootočení siete spôsobí pri rovnakej dĺžke chybu menšiu ako 1 mm.

tab. 2 Rozdiel transformačných parametrov JTSK → ETRS89 a JTSK/03 → ETRS89

<i>abs. hodnota rozdielov parametrov <math>\Delta</math></i>	<i>hodnota</i>	<i>účinnok pri 300 km dĺžke</i>
$\Delta B^T, \Delta L^T$ rozdiel ťažísk	$\Delta B^T = 0''.001216$ $\Delta L^T = 0''.001091$	36,5 mm bez účinku 21,8 mm bez účinku
$\Delta tB, \Delta tL$ rozdiel translácie	$\Delta tB = 0''.000011$ $\Delta tL = 0''.000006$	0.3 mm 0.1 mm
$\Delta uH$ rozdiel rotácie v ťažisku	$\Delta uH = 0''.00051$	0.7 mm
$\Delta ds$ rozdiel mierkových faktor	$\Delta ds = 0.00656$ mm/km	1.8 mm

## 7.2 Odhad transformačných parametrov S-42↔ ETRS89

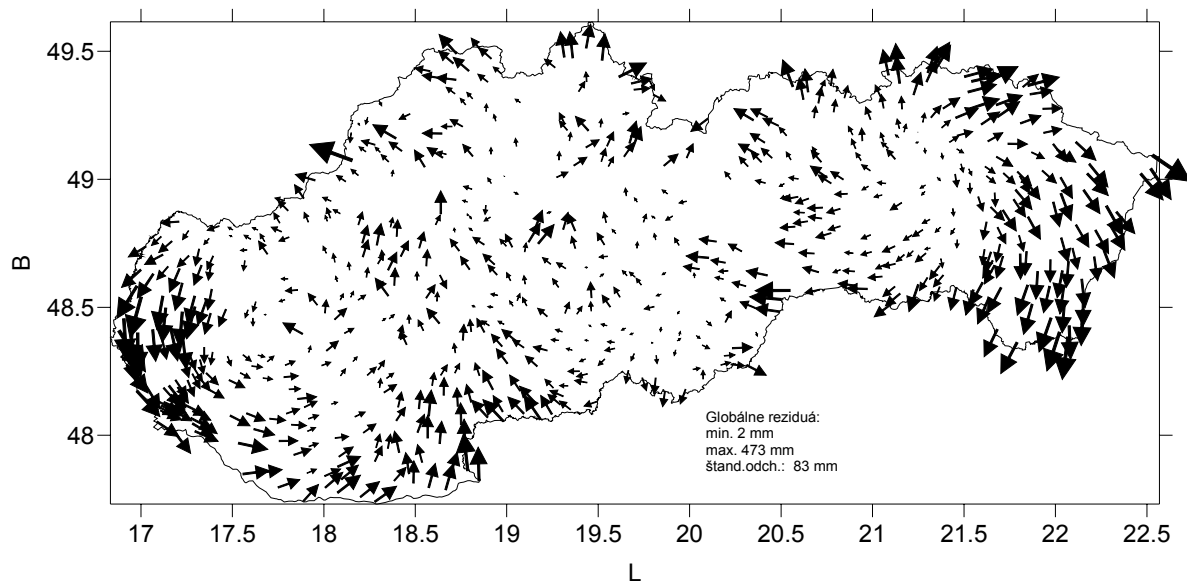
Takou istou transformáciou na povrchu elipsoidu sme vypočítali hodnoty parametrov transformačného kľúča S-42→ETRS89 (zdrojová sústava→cieľová sústava). Vzhľadom na to, že polohová presnosť S-42 je niekoľkokrát menšia ako ETRS89, zvolili sme váhy zdrojovej a cieľovej sústavy nasledujúco: váha zdroja = 1, váha cieľa = 25.

### 7.2.1 Výsledky charakterizujúce vzájomný vzťah S-42 a ETRS89

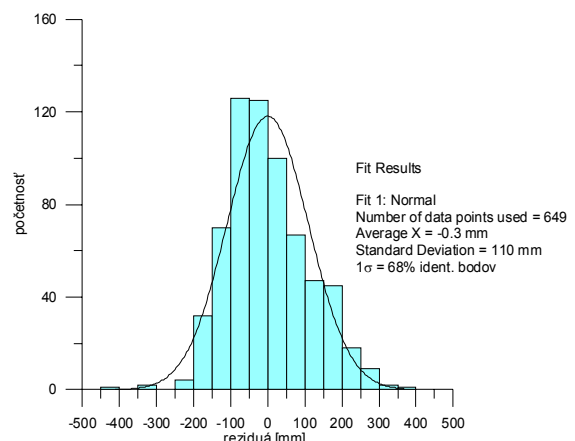
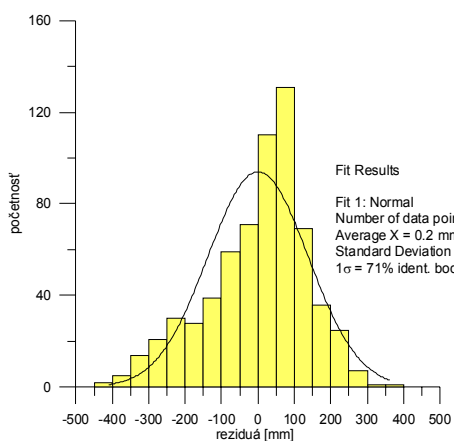
Rezíduá na identických bodoch  $v_B, v_L$  na povrchu elipsoidu sú znázornené na obr. 22. (Mierka rezíduí na obr. 15 a obr. 22 je rovnaká). Rozsah absolútnych hodnôt globálnych rezíduí leží v intervale  $< 2, 473 >$  mm. Štandardná odchýlka rezíduí pre smer sever-juh je 137 mm, interval

spoľahlivosti  $1\sigma$  pokrýva 71% identických bodov. Štandardná odchýlka rezíduí pre smer východ-západ je 110 mm, interval spoľahlivosti  $1\sigma$  pokrýva 68% identických bodov. Histogramy globálnych rezíduí sú znázornené na obr. 23. Tieto rezíduá boli predmetom modelovania. Využili sme štandardné nástroje programu SURFER ver. 8.0, s cieľom vytvoriť **digitálne modely reziduálnych zložiek** v príslušných smeroch  $\nu B$  a  $\nu L$ , ktoré predstavujú korekciu nehomogénnej deformácie realizácie systému S-42. Na modelovanie bola použitá metóda kriging s krokom gridu 5,5 x 5,5 km. Získali sme 129x47 priesečníkov. Rozsah modelov pre obidve zložky geodetických súradníc je  $47.4^\circ < B < 49.7^\circ$ ;  $16.4^\circ < L < 22.8^\circ$ . Označenie modelov je **DMRZ-S42<sub>B</sub>** a **DMRZ-S42<sub>L</sub>** a sú zobrazené na obr. 24.

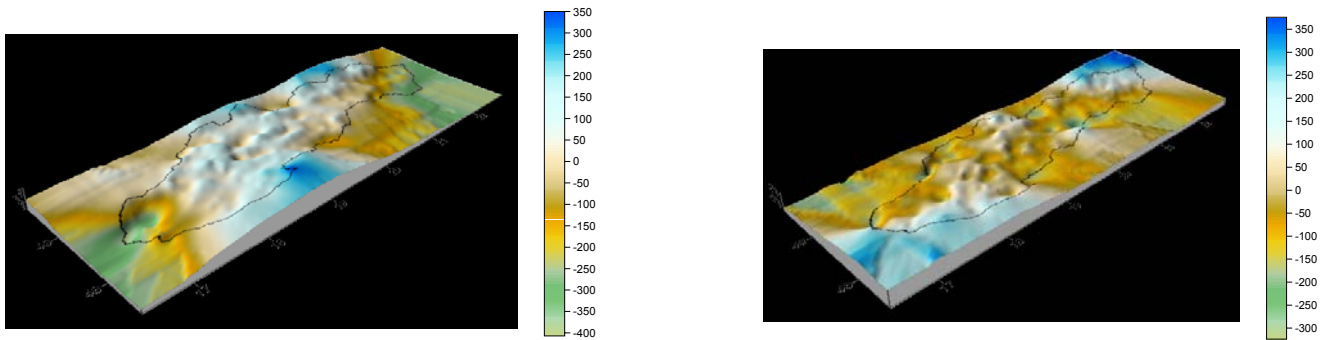
Diferenciálne (zvyškové) rezíduá, ktoré vznikli ako rozdiel modelových hodnôt korekcií a globálnych pôvodných rezíduí (z ktorých boli modely vytvorené), sú znázornené na obr. 25. Mierka zobrazenia rezíduí na obr. 22 a obr. 25 nie je rovnaká. Diferenciálne rezíduá sme v pomere ku globálnym kvôli grafickému znázorneniu zväčšili 10x. Rozsah diferenciálnych rezíduí je v intervale  $< 0 ; 135 >$  mm, **štandardná odchýlka pre smer sever-juh je 14 mm**, pre smer **východ-západ je 15 mm**. Interval spoľahlivosti  $1\sigma$  pre smer sever-juh pokrýva 74% identických bodov, pre smer východ-západ 75% identických bodov. Histogramy rozdelenia diferenciálnych rezíduí sú znázornené na obr. 26.



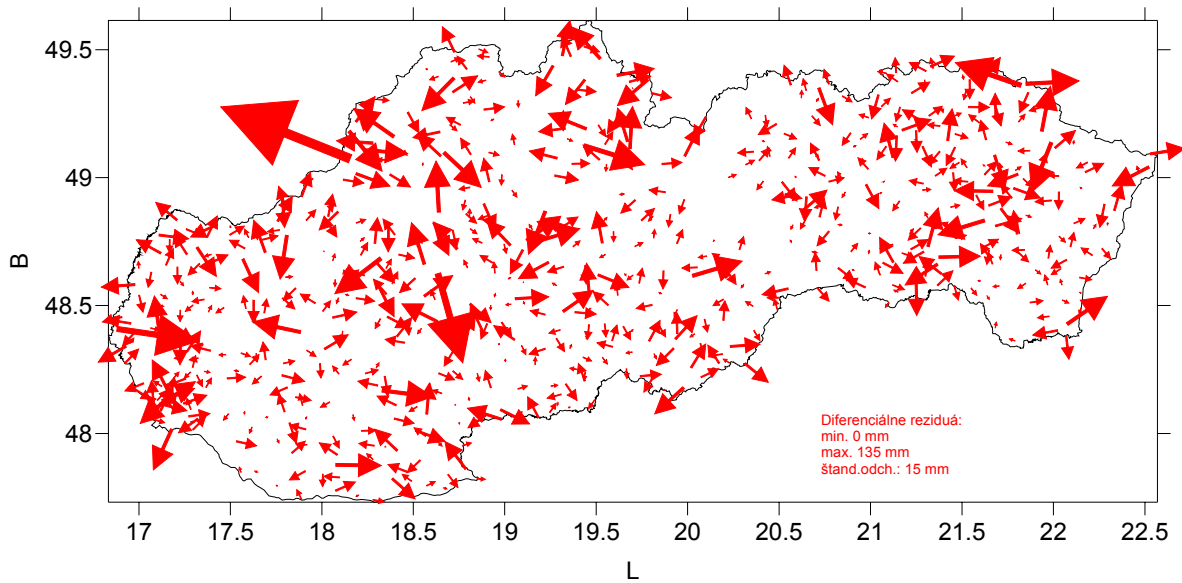
obr. 22 Globálne reziduá (S-42 – ETRS89) na identických bodoch



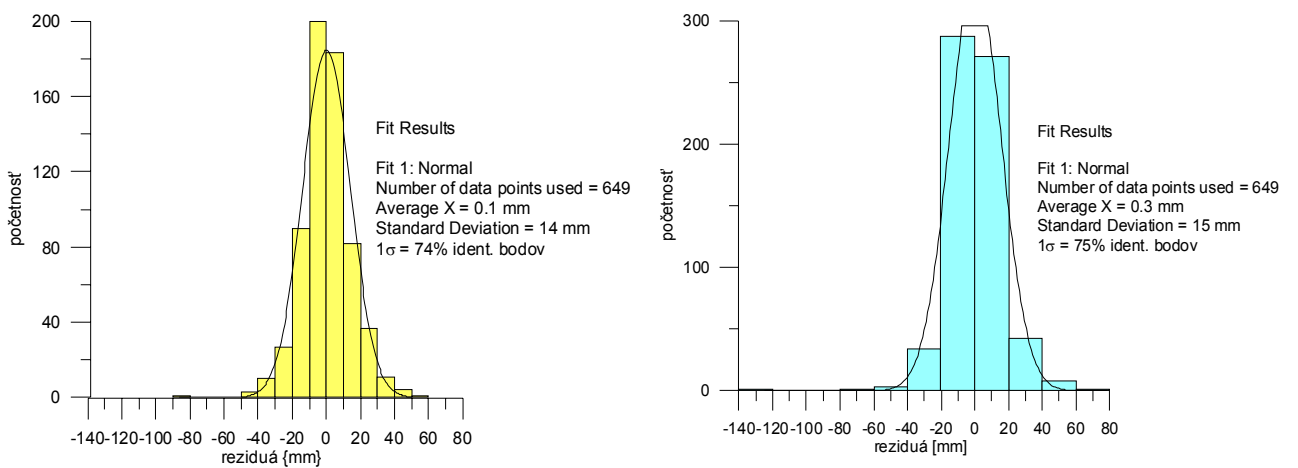
obr. 23 Histogramy globálnych rezíduí (S-42 – ETRS89) pre smer sever-juh a východ-západ



obr. 24 Vizualizácia DMRZ-S42<sub>B</sub> a DMRZ-S42<sub>L</sub>



obr. 25 Diferenciálne reziduá vzťahu S-42 – ETRS89 na identických bodoch 10x zväčšené



obr. 26 Histogramy diferenciálnych rezíduí dB a dL vzťahu S-42 – ETRS89

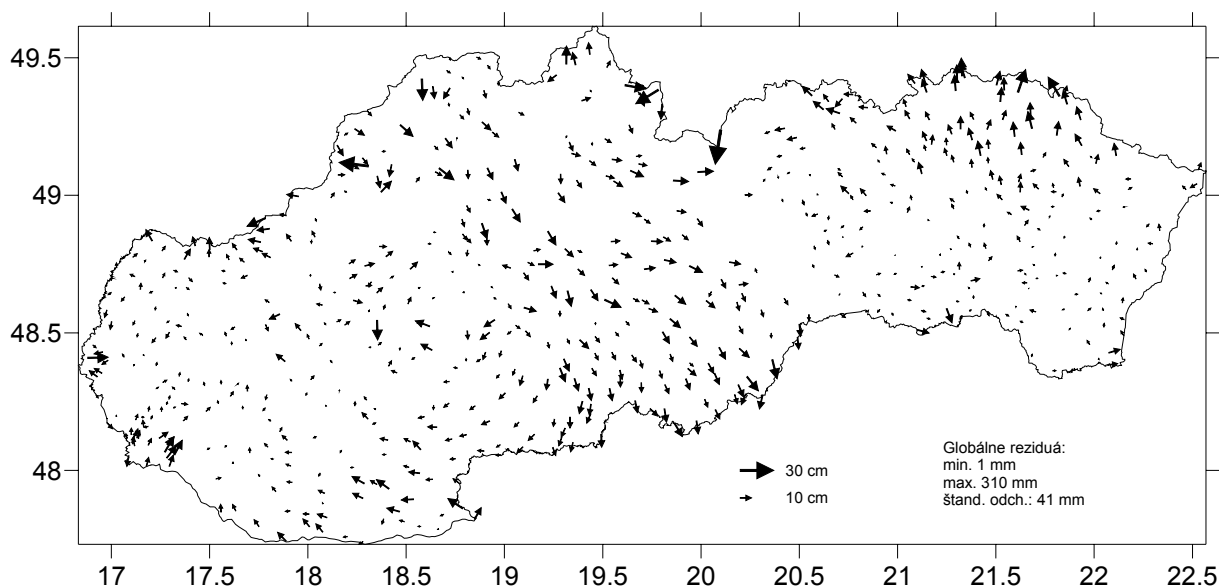
### 7.3 Odhad transformačných parametrov S-42/83↔ ETRS89

Analogicky sme vypočítali hodnoty parametrov transformačného kľúča S-42/83 → ETRS89 (zdrojová a cieľová sústava). Vzhľadom na to, že polohová presnosť S-42/83 je niekoľkokrát menšia ako ETRS89, zvolili sme váhy zdrojovej a cieľovej sústavy nasledujúco : váha zdroja = 1, váha cieľa = 10.

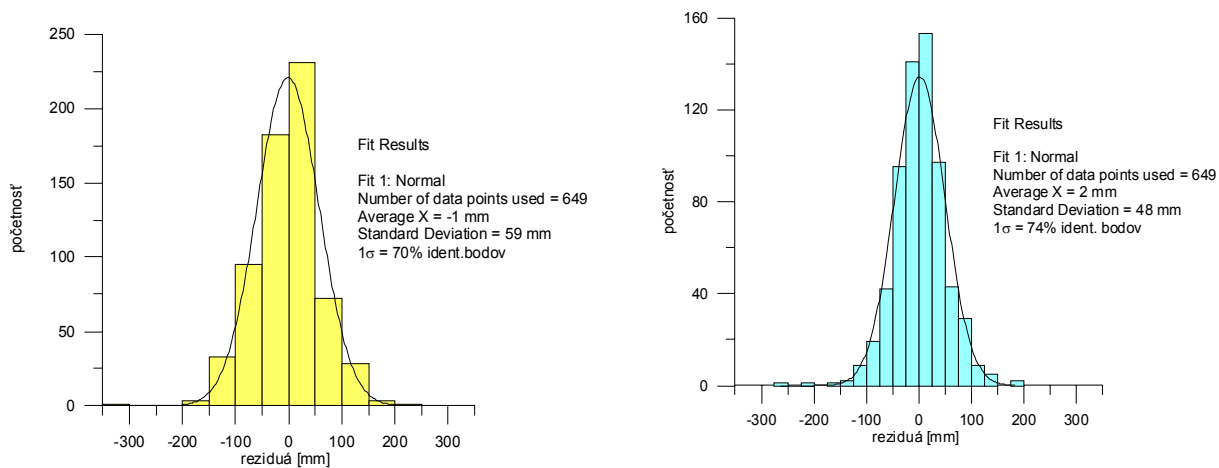
#### 7.3.1 Výsledky charakterizujúce vzájomný vzťah S-42/83 a ETRS89

Rezíduá na identických bodoch  $v_B, v_L$  na povrchu elipsoidu sú znázornené na obr. 27. (Mierka rezíduí na obr. 15, obr. 22 a obr. 27 je rovnaká). Rozsah absolútnych hodnôt globálnych rezíduí leží v intervale  $< 1; 310 >$  mm. Štandardná odchýlka **globálnych rezíduí** pre **smer sever-juh je 59 mm**, interval spoľahlivosti  $1\sigma$  pokrýva 70% identických bodov,  $2\sigma$  pokrýva 95% identických bodov. Štandardná odchýlka rezíduí pre **smer východ-západ je 48 mm**, interval spoľahlivosti  $1\sigma$  pokrýva 74% identických bodov,  $2\sigma$  pokrýva 95% identických bodov. Histogramy globálnych rezíduí sú znázornené na obr. 28. Tieto rezíduá boli predmetom modelovania. Využili sme štandardné nástroje programu SURFER ver. 8.0, s cieľom vytvoriť **digitálne modely rezíduálnych zložiek** v príslušných smeroch  $v_B$  a  $v_L$ , ktoré predstavujú korekciu nehomogénnej deformácie realizácie systému S-42/83. Na modelovanie bola použitá metóda kriging s krokom gridu 5,5 x 5,5 km. Získali sme 129x47 priesečníkov. Rozsah modelov pre obidve zložky geodetických súradníc je  $47.4^\circ < B < 49.7^\circ$ ;  $16.4^\circ < L < 22.8^\circ$ . Označenie modelov je **DMRZ-S42/83<sub>B</sub>** a **DMRZ-S42/83<sub>L</sub>** a sú zobrazené na obr. 29.

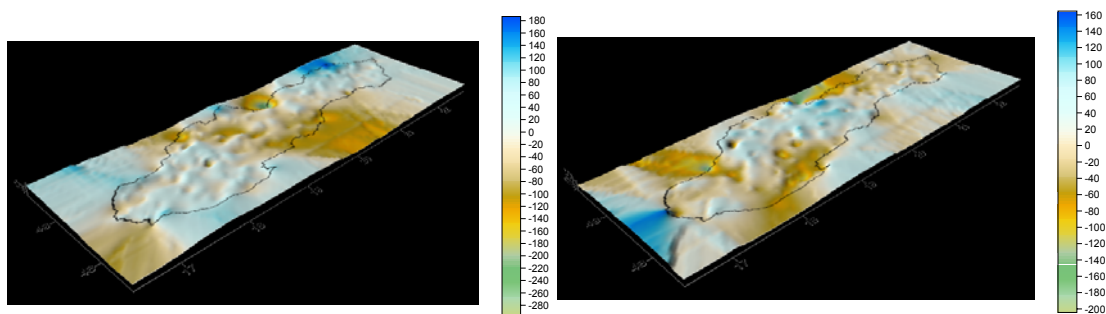
Diferenciálne (zvyškové) rezíduá, ktoré vznikli ako rozdiel modelových hodnôt korekcií a globálnych, pôvodných rezíduí (z ktorých boli modely vytvorené), sú znázornené na obr. 30. Mierka zobrazenia rezíduí na obr. 27 a obr. 30 nie je rovnaká. Diferenciálne rezíduá sme v pomere ku globálnym, kvôli grafickému znázorneniu, zväčšili 10x. Rozsah **diferenciálnych rezíduí** je v intervale  $< 0 ; 109 >$  mm, štandardná odchýlka pre **smer sever-juh je 13 mm**, pre **smer východ-západ je 14 mm**. Interval spoľahlivosti  $1\sigma$  pre smer sever-juh pokrýva 78%, pre smer východ-západ 77% identických bodov. Histogramy rozdelenia diferenciálnych rezíduí sú znázornené na obr. 31.



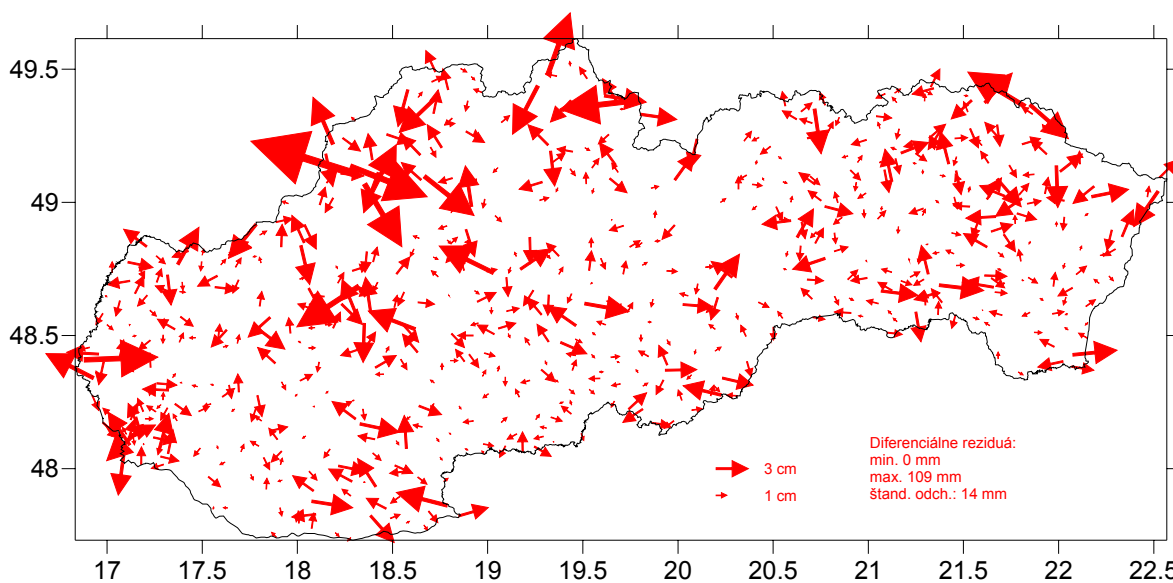
obr. 27 Globálne rezíduá vzťahu S-42/83 – ETRS89 na identických bodoch



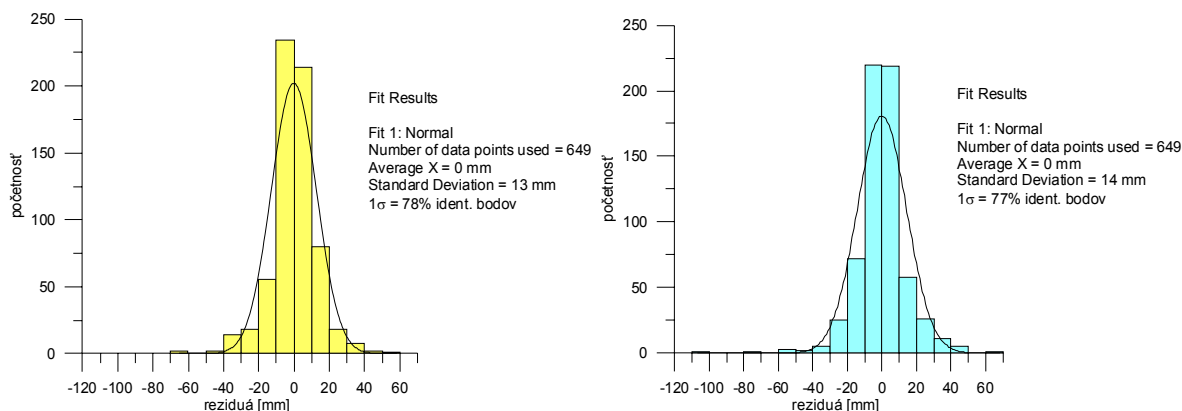
obr. 28 Histogramy rozdelenia globálnych rezíduí vzt'ahu S-42/83 – ETRS89 pre smer sever-juh a východ-západ



obr. 29 Vizualizácia DMRZ-S42/83<sub>B</sub> a DMRZ-S42/83<sub>L</sub>



obr. 30 Diferenciálne rezíduá vzt'ahu S-42/83 – ETRS89 na identických bodoch 10x zväčšené



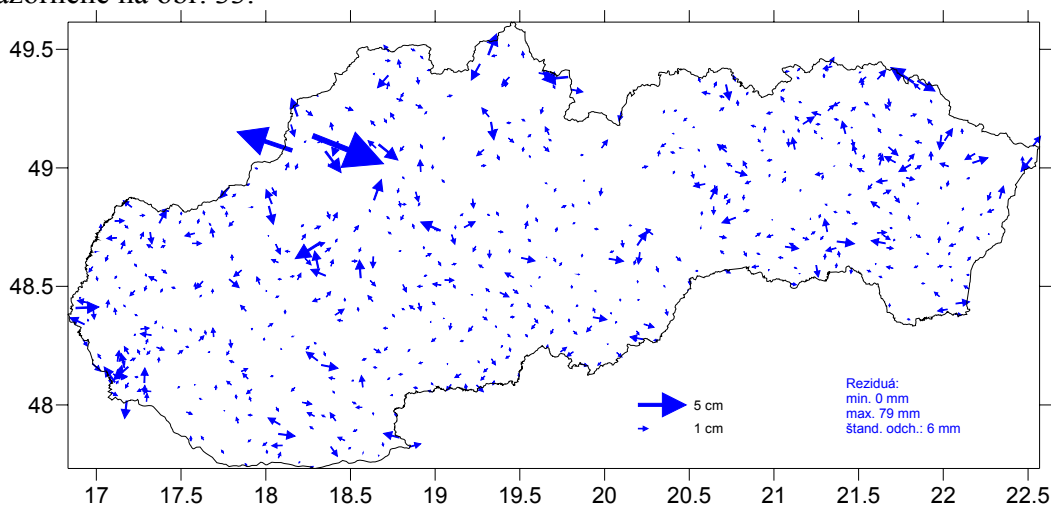
obr. 31 Histogramy diferenciálnych rezíduí dB a dL S-42/83 – ETRS89

### 7.3.2 Výpočet novej realizácie súradníc S-42/83/03

Analogickou elimináciou globálnej a lokálnej (nehomogénnej) deformácie z pôvodnej realizácie súradníc S-42/83 sme vypočítali novú realizáciu súradníc systému. Označujeme ju S-42/83/03.

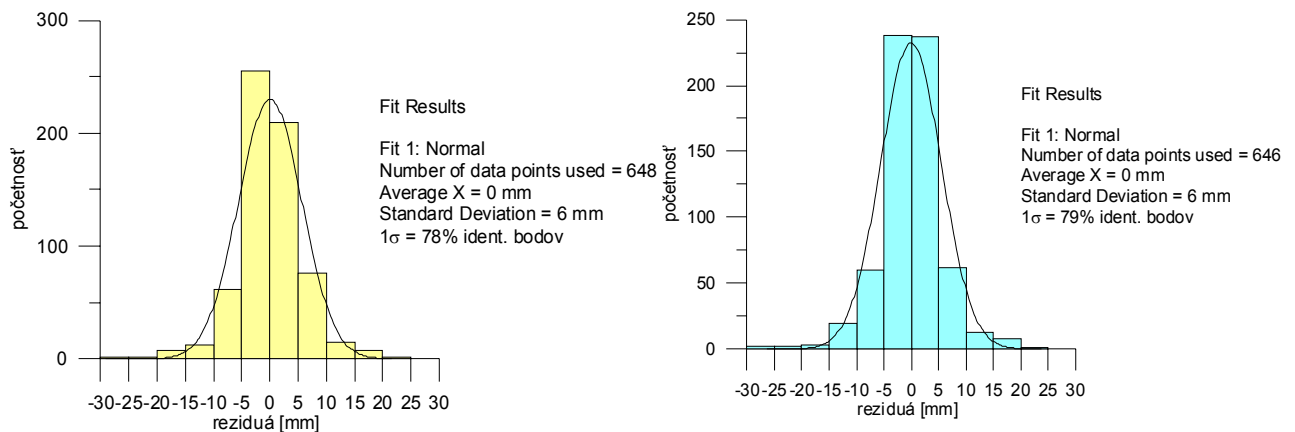
Na analýzu presnosti S-42/83/03 voči ETRS89 sme vykonali opakovanú transformáciu S-42/83/03 do ETRS89 metódou transformácie na povrchu elipsoidu GRS80. Vzhľadom na to, že polohová presnosť S-42/83/03 je blízka ETRS89, zvolili sme rovnaké váhy zdrojovej aj cieľovej sústavy, a to rovné jednej.

Rozsah absolútnych hodnôt rezíduí na identických bodoch je v intervale  $< 0 ; 79 >$  mm. Reziduá sú znázornené na obr. 32. **Štandardná odchýlka rezíduí pre smer sever-juh je 6 mm**, interval spoľahlivosti  $1\sigma$  pokrýva 78% identických bodov,  $2\sigma$  pokrýva 95% identických bodov,  $3\sigma$  pokrýva 98% identických bodov. To znamená, že zo sto transformovaných bodov je 98 pokrytých  $3\sigma$  konfidenčnou oblasťou o polomere 18 mm. **Štandardná odchýlka rezíduí pre smer východ-západ je 6 mm**, interval spoľahlivosti  $1\sigma$  pokrýva 79% identických bodov,  $2\sigma$  pokrýva 95% identických bodov,  $3\sigma$  pokrýva 99% identických bodov. Histogramy rezíduí sú znázornené na obr. 33.



obr. 32 Reziduá z opakovanej transformácie S-42/83/03 → ETRS89 10x zväčšené





obr. 33 Histogramy rezíduí S-42/83/03 – ETRS89 pre smer sever-juh a východ-západ

Rozdiely v odhadoch transformačných parametrov (tab. 3) boli spôsobené vylúčením jedného bodu, na ktorom bola diagnostikovaná hrubá chyba. Preto došlo k zmene ťažiska siete a následne aj k zmene odhadu parametrov.

tab. 3 Rozdiel transformačných parametrov S-42/83 → ETRS89 a S-42/83/03 → ETRS89

<i>abs. hodnota rozdielov parametrov <math>\Delta</math></i>	<i>hodnota</i>	<i>účinnok pri 300 km dĺžke</i>
$\Delta B^T, \Delta L^T$ rozdiel ťažisk	$\Delta B^T = 7''.118730$ $\Delta L^T = -8''.672892$	36,5 mm 21,8 mm
$\Delta tB, \Delta tL$ rozdiel translácie	$\Delta tB = -0''.000039$ $\Delta tL = 0''.000297$	1.2 mm 7.1 mm
$\Delta uH$ rozdiel rotácie v ťažisku	$\Delta uH = 0''.000448$	0.6 mm
$\Delta ds$ rozdiel mierkových faktorov	$\Delta ds = 0.00$ mm/km	0 mm

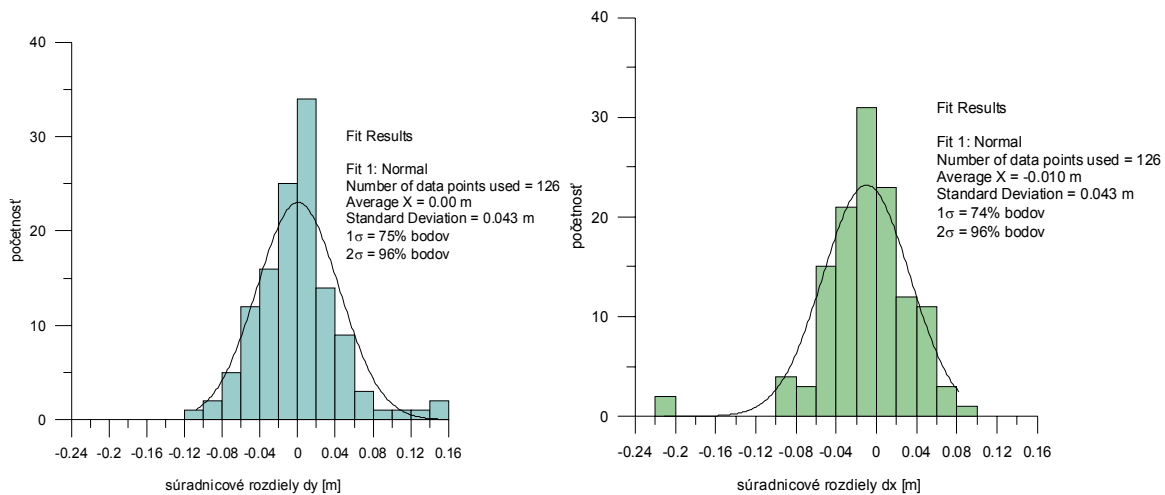
## 8 Testovanie transformačných parametrov a DMRZ nezávislou množinou bodov

Relatívne nádejné výsledky transformácií národných súradnicových referenčných systémov do ETRS89 sme testovali nezávislými postupmi. V podkapitolách uvádzame niektoré z nich.

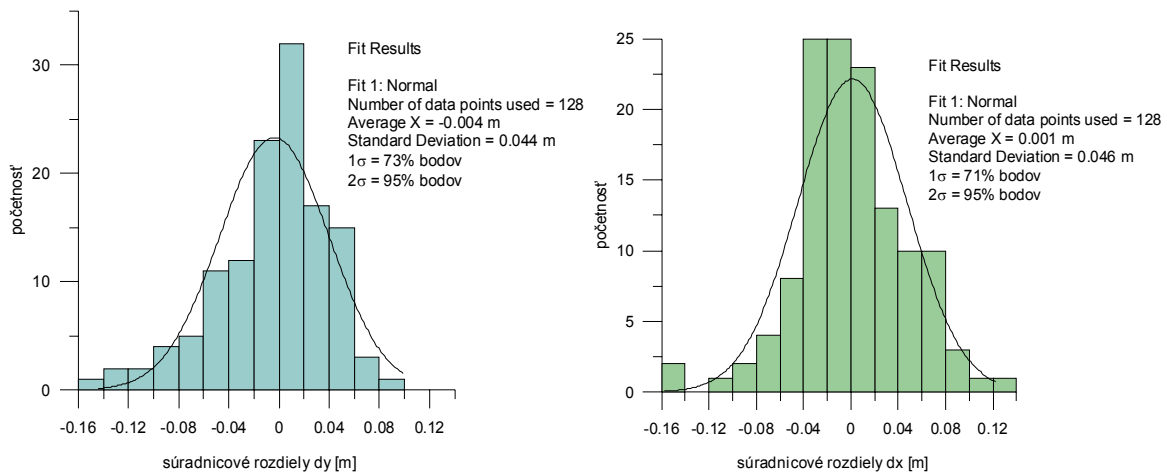
### 8.1 Testovanie JTSK ↔ ETRS89 nezávislou množinou bodov

Na otestovanie dosiahnutého transformačného kľúča JTSK ↔ ETRS89 a k nemu platných DMRZ-JTSK sme použili dve nezávislé množiny trigonometrických bodov, ktorých konfigurácia je uvedená na obrázku obr. 36. Tieto body majú známe pôvodné realizácie súradníc JTSK a taktiež súradnice určené správcom v ETRS89. Prvá množina bodov má určené súradnice zo 6-hodinových observácií. Meranie bolo vykonané v roku 1999. Spracovanie bolo vykonané bernským softvérom ver. 4.2 postupom platným pre Štátnu priestorovú sieť [ 7 ]. Druhá množina bodov má určené súradnice z 1 hodinových observácií. Uskutočnilo sa v roku 2004. Namerané údaje boli spracované firemným softvérom Trimble Geomatics Office, v.1.62.

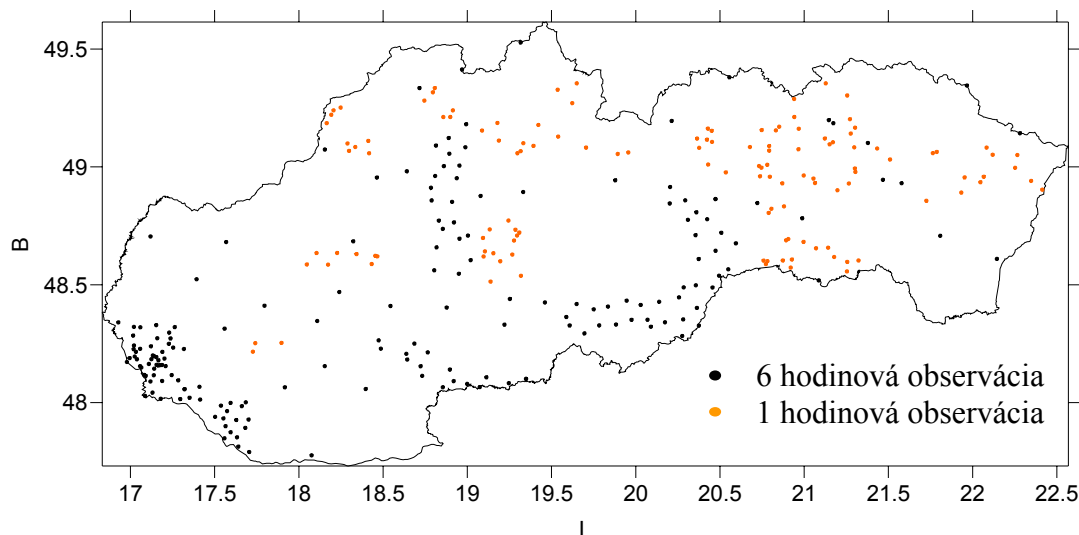
Súradnice z ETRS89 boli aplikáciou transformačných parametrov uvedených v tab. 1 a DMRZ-JTSK<sub>B</sub> a DMRZ-JTSK<sub>L</sub> programom DTplus [ 5 ] spätne transformované do starej realizácie S-JTSK. To znamená, že sa uplatnil účinok štyroch transformačných globálnych parametrov, posun, rotácia, mierka, platne pre povrch referenčného elipsoidu GRS80, a z DMRZ-JTSK sa bikubickou splajnovou interpolačnou metódou vyinterpolovala korekcia polohy na uplatnenie lokálnej a globálnej deformácie realizácie súradníc JTSK. Takto transformované súradnice boli porovnané s pôvodnými realizáciami súradníc S-JTSK vedenými v dokumentácii geodetických základov. Histogramy rozdelenia súradnicových rozdielov sú uvedené na obr. 34 a obr. 35. **Štandardná odchýlka neprekračuje v oboch testovaných množinách hodnotu 45 mm.** Do oblasti s konfidenciou  $2\sigma$  spadá 95% testovaných bodov. Z uvedených histogramov je zrejmé, že **na testovacej množine sa potvrdila normalita rozdelenia diferencií a nevychýlenosť**. Toto tvrdenie platí napriek tomu, že v jednom prípade priemerná hodnota diferencií  $dx$ , reprezentujúca vychýlenosť, pre 6 hodinové meranie dosiahla hodnotu  $-0.01\text{m}$ . Táto vychýlenosť je spôsobená pravdepodobne jednou hrubou chybou okolo  $0.2\text{ m}$ , ktorá prekračuje 5 násobok uvedenej štandardnej odchýlky, a preto ju môžeme považovať za omyl.



obr. 34 Súradnicové rozdiely v osiach  $y, x$  zo 6-hodinových observácií



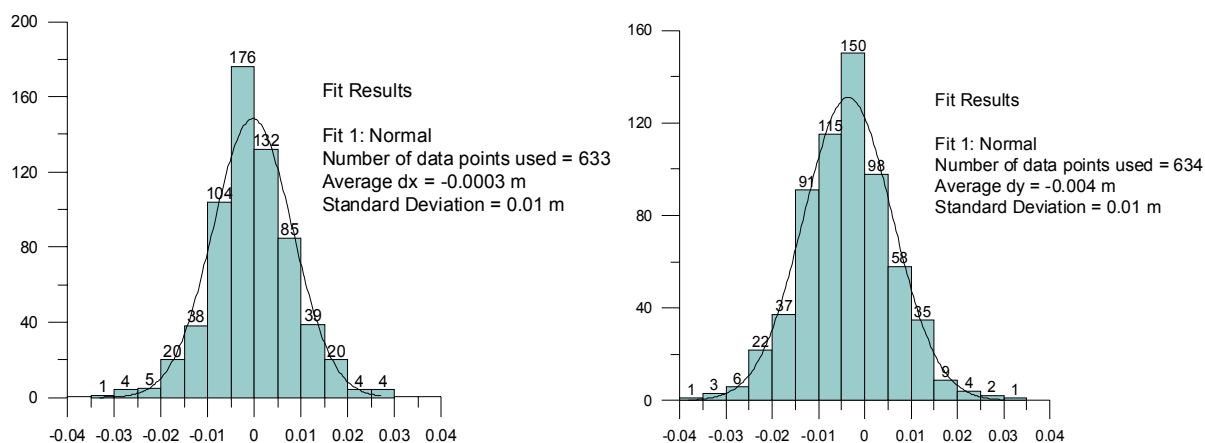
obr. 35 Súradnicové rozdiely v osiach  $y, x$  z 1-hodinových observácií



obr. 36 Rozmiestnenie bodov na testovanie transformačných parametrov JTSK ↔ ETRS89 a DMRZ-JTSK

## 8.2 Testovanie vzťahu nových realizácií JTSK/03 a S-42/83/03

Cieľom tohoto testu bolo overiť, či parametre transformácií a DMRZ-SRS národných súradnicových systémov JTSK a S-42/83 generujú dvojice blízkych bodov, ktoré na  $3\sigma$  akceptačnej oblasti môžeme prehlásiť za totožné. Uplatnením modelu aplikačnej schémy z kapitoly 4, v ktorej sa prevody medzi zobrazeniami národných referenčných systémov uskutočňujú cez ETRS89, sme realizácie pôvodných súradníc JTSK transformovali do novej realizácie JTSK/03, a rovnako pôvodné realizácie súradníc S-42/83 do JTSK/03. Dostali sme dve číselné vyjadrenia toho istého bodu. Takto získané súradnicové rozdiely sme znázornili v histogramoch rozdelenia uvedených na obrázku obr. 37.



obr. 37 Histogram rozdelenia rozdielov súradníc x,y JTSK/03 a S-42/83/03 transformovaných do JTSK/03

Môžeme konštatovať nasledujúce závery:

- štandardná odchýlka určená z rozdielov súradníc dosiahla 10 mm,

- pre súradnicové rozdiely  $dx$ , ako aj pre  $dy$  sa potvrdila normalita,
- pre vzťah JTSK/03 a S-42/83/03 sa potvrdila nevychýlenosť,
- $3\sigma$  akceptačná oblasť má polomer 30 mm,

## 9 Záver

Správca geodetických základov v tomto príspevku prezentoval na slovenské pomery bezprecedentný spôsob transformácie národných súradnicových referenčných systémov do celoeurópskeho ETRS89 a prevod geodetických výšok systému ETRS89 do systému Bpv. Publikuje štyri záväzné transformačné parametre pre realizáciu súradnicového systému S-JTSK.

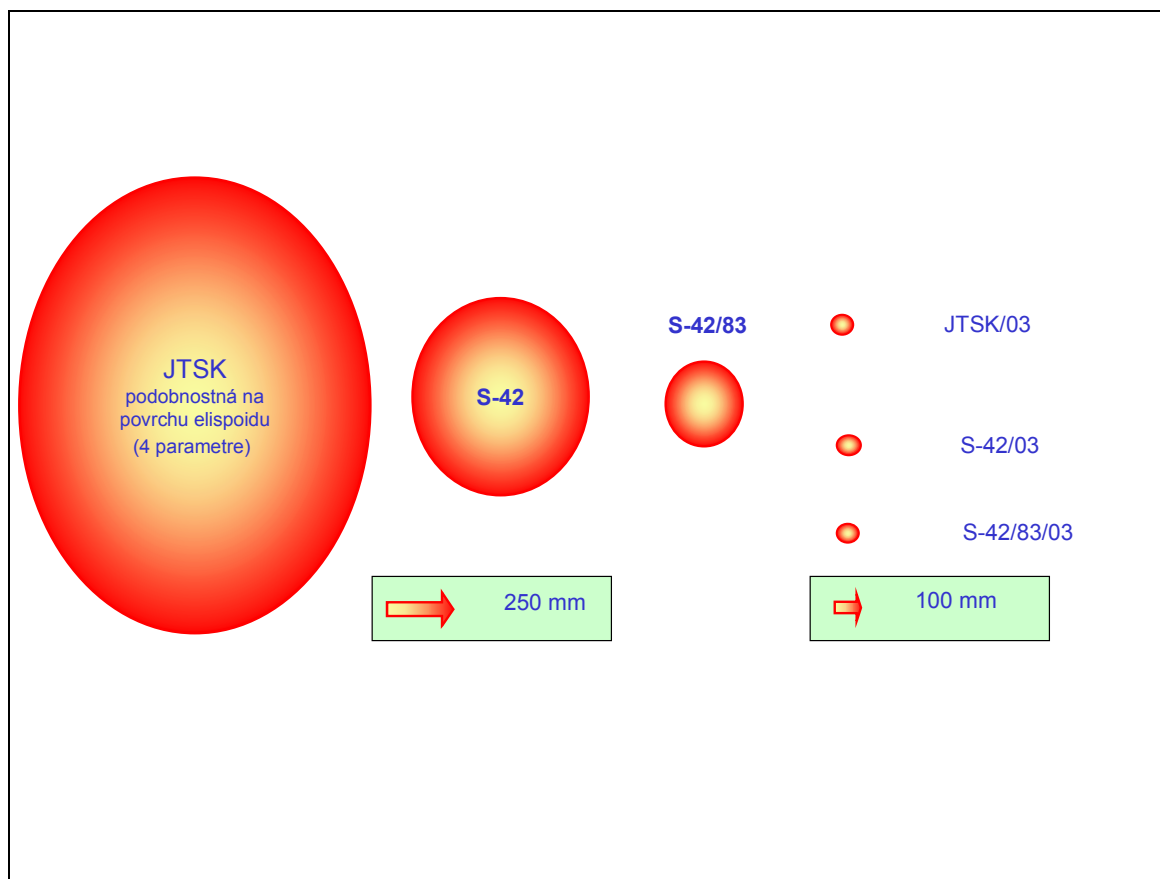
Transformačné parametre pre S-42 a S-42/83 nie sú predmetom publikovania a ani zverejňovania. Budú slúžiť len na špeciálne geodetické projekty, hraničné dielo, pre intenzívnu spoluprácu civilných a vojenských geodetov, na tvorbe priestorových informácií v ZB GIS AIS GKK a CPD VISÚ a na spolupráci v geodetických základoch.

Použitím globálnych transformačných vzťahov a digitálnych modelov reziduálnych zložiek DMRZ-SRS a DVRM-Bpv sa pre polohu dosiahla presnosť globálnej transformácie reprezentovanej veľkosťou akceptačnej oblasti o polomere  $3\sigma$ . Použitím DVRM-Bpv je možné dosiahnuť presnosť prevodu výšky s veľkosťou akceptačného intervalu  $\pm 3\sigma$  o výške 48 resp. 204 mm.

Tab. 4 Prehľad polomerov akceptačných oblastí a intervalov  $3\sigma$  transformácie národných SRS a výškového referenčného systému do ETRS89

Realizácia RS	Uplatnená metóda transformácie	Akceptačná oblasť (AO)	Polomer AO v [mm]
JTSK	[TPM(4)]-JTSK	$3\sigma$	951; 657
S-42	[TPM(4)]-S42	$3\sigma$	411; 330
S-42/83	[TPM(4)]-S42/83	$3\sigma$	177; 144
JTSK/03	[TPM(4)+DMRZ]-JTSK	$3\sigma$	42; 42
JTSK/03 <sup>*</sup>	[TPM(4)+DMRZ]-JTSK	$3\sigma$	135; 135
S-42/03	[TPM(4)+DMRZ]-S42	$3\sigma$	42; 45
S-42/83/03	[TPM(4)+DMRZ]-S42/83	$3\sigma$	39; 42
Bpv	DVRM-Bpv	$3\sigma$	24 (na identických bodoch)
Bpv <sup>*</sup>	DVRM-Bpv	$3\sigma$	102 (na neidentických bodoch)

(\* polomery akceptačných oblastí boli získané na nezávislej množine bodov z nižšou presnosťou určenia referenčných hodnôt  $x, y$  a  $H$ )



obr. 38 Pomer polomerov  $3\sigma$  akceptačných oblastí transformácie národných SRS do ETRS89

Nezávislým testovaním vzťahu JTSK-ETRS89 množinou bodov so 6 a 1 hodinovou observačnou dobou merania GPS sa preukázala veľkosť akceptačnej oblasti o polomere  $3\sigma$  menšia ako 135 mm.

Transformačné vzťahy spolu s DMRZ zaručujú pre celé územie Slovenska spojitú transformáciu. Eliminovaná sa nejednoznačnosť vznikajúca pri používaní lokálnych transformačných kľúčov.

Správca geodetických základov zavádza jednotný Digitálny výškový referenčný model DVRM-*Bpv*, ktorý zaručuje jednoznačnosť prevodu elipsoidickej výšky systému ETRS89 do systému normálnych výšok Balt po vyrovnaní.

Správca geodetických základov prehlasuje realizáciu súradníc JTSK/03 za funkčnú a odporúča všetkým geodetom túto skutočnosť zobráť na vedomie so všetkými dôsledkami čo s tým súvisia. Je potrebné si pre každú geodetickú prípravu zabezpečiť od správcu geodetických základov nové, aktuálne geodetické údaje, v ktorých bude zaručená vysoká konzistencia systémov JTSK/03, *Bpv* a ETRS89. Všetky zaužívané zvyklosti pri používaní S-JTSK zostávajú zachované.

Zásady poskytovania a distribuovania transformačných parametrov, digitálnych modelov DMRZ-*JTSK* a DVRM-*Bpv* sú nasledujúce :

- transformačné parametre JTSK-ETRS89 sú voľne dostupné na [www.gku.sk](http://www.gku.sk), alebo u správcu geodetických základov,

- DMRZ-*JTSK<sub>B</sub>* a DMRZ-*JTSK<sub>L</sub>* sa poskytujú podľa platných zásad poskytovania produktov koncovým používateľom,
- DVRM-Bpv sa poskytuje podľa platného cenníka správcu geodetických základov, ktorý sa v súčasnosti aktualizuje a bude zverejnený [www.gku.sk](http://www.gku.sk).

## 10 Literatúra:

- [ 1 ] IHDE, J. – AUGHAT, W. : The Vertical Reference System for Europe. In: Map Projection for Europe. European Commission, Joint Research Centre, EuroGeographics, Bundesamt für Landestopographie Switzerland, Bundesamt für Kartographie und Geodäsie Germany. European Communities, 2003. p. 95-109.
- [ 2 ] KLOBUŠIAK, M.: Reverzibilný vzťah realizácií dvoch projekčných systémov S-JTSK a ETRS 89. In: Zborník referátov „Medzinárodná konferencia Geodetické siete 2001“, pobočka SSGK pri GKÚ, Podbanské 2001, s. 67-75.
- [ 3 ] KLOBUŠIAK, M. : Dynamický stochastický etalón. In: Zborník referátov "Metrológia v geodézii", SvF STU, Katedra geodetických základov, Bratislava 2001, s. 75-84.
- [ 4 ] KLOBUŠIAK, M. – LEITMANNOVÁ, K.: Slovenská permanentná GNSS služba na prevádzkovanie slovenského observačného systému - nové geodetické priestorové základy. In: Zborník referátov „Geodetické referenčné systémy“, KGZ SvF STU, Bratislava 2002, s. 23-38.
- [ 5 ] KLOBUŠIAK, M.: DT*plus* – Programový systém na deterministické prevody a transformácie geodetických bodov a GIS objektov. Verzia 9.2005. MaKlo, nepublikované. © 1995-2005.
- [ 6 ] LEICK, A.: GPS Satellite Surveying. New York, Chichester, Toronto, Brisbane, Singapore, John Wiley & Sons, 1990. 352 p., ISBN 0-471-81990-5.
- [ 7 ] LEITMANNOVÁ, K.: – Určenie súradníc vybraných bodov ZBP v systéme ETRS89 a S-JTSK s využitím národného referenčného rámca ŠPS 99 (Meranie GPS v roku 1999). Technická správa 2000-2001.
- [ 8 ] LEITMANNOVÁ, K.- KLOBUŠIAK, M. – PRIAM, Š. - FERIANC, D.: SKTRF 2001 – referenčný rámec pre Štátnu priestorovú sieť. In: In: Zborník referátov „Geodetické referenčné systémy“, KGZ SvF STU, Bratislava 2002, s. 137- 148.
- [ 9 ] LEITMANNOVÁ, K.- HAVLÍKOVÁ, M. : – Výpočet SKTRF 2003. Technická správa 2003-2004. (nepublikované)
- [ 10 ] LEITMANNOVÁ, K.- KLOBUŠIAK, M. – FERIANC, D. : Realizácia SKTRF 2005. In: CD zborník referátov „Geodetické siete a priestorové informácie“, SSGK pri GKÚ a TOPU BB, 24.-26. 10. 2005.
- [ 11 ] MOJZEŠ, M.: Transformácia gravimetrického kvázigeoidu. Technická správa, apríl – október 1996.
- [ 12 ] MOJZEŠ, M.: Spresnenie gravimetrického kvázigeoidu Slovenska (GMSQ98BF). Vedecko – technický projekt „ Geodetická integrovaná sieť“, etapa 4f, VÚGK, 1998.
- [ 13 ] MOJZEŠ, M.: Spresnenie gravimetrického kvázigeoidu Slovenska (Návrh ciest na jeho ďalšie spresňovanie). Vedecko – technický projekt „ Geodetická integrovaná sieť“, etapa 4e. VÚGK, 1999.

- [ 14 ] MOJZEŠ, M. – JANÁK, J. – PAPČO, J.: Určenie gravimetrického kvázigeoidu SR, verzia 2003 s použitím vyšších členov v rozvoji poruchového potenciálu. Vedecko – technický projekt „ Integrovaná geodetická sieť“, čiastková úloha č.1 „Rozvoj integrovaných geodetických základov Slovenska“. VÚGK, 2003.
- [ 15 ] PECÁR, J. – GRAND, T.: Prvý kvázigeoid pre územie Slovenska. In: Zborník referátov „Modernizácia geodetických základov Slovenska“, SSGK pri VÚGK Bratislava, 30.3.1994, s.169-177.